线性代数 A1 期中考试

2026 年 4 月 30 日 9:45—11:45，2105 教室

姓名____________________ 学号____________________________ 得分____________________

说明：禁止直接使用课本习题或其他参考书中的结论.

一、填空题. 每空 5 分，共 25 分. 结果需化简，直接写在空格处.

1. 满足 $f(\pm 1) = 1$，$f(\pm 2) = 2$ 的所有 $f \in \mathbb{R}[x]$ 为 ____________________________________.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. $A^5 = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. $\det(A) =$ _______，伴随方阵 $A^* = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^4 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^4 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & x^4 & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{4\times 4}$. A 的 Smith 标准形为 $\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$.

二、简答题. 每题 6 分，共 30 分. 判断下列叙述是否正确，并简要说明理由.

1. 对于任意 $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$，齐次线性方程组 $AA^T x = \mathbf{0}$ 与 $A^T A x = \mathbf{0}$ 同解.

2. 对于任意 $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$，存在 $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$，使得 $B^3 = A$.

3. 若 $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ 的伴随方阵 $A^* = B^*$，则 $A = B$.

4. 对于任意 $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$，矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 $XA = B$ 有解.

5. 对于任意 $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$，$\operatorname{rank}(A - B + AB) = \operatorname{rank}(A - B + BA)$.

三、解答题. 每题 15 分，共 45 分. 需给出详细解答过程.

1. 对参数 a 讨论求解 $\mathbb{R}$ 上线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. 设 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $AB = BA = O$. 求证：存在可逆方阵 $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得
$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q, \quad B = Q^{-1} \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_s \end{pmatrix} P^{-1}.$$
其中 $r = \operatorname{rank}(A)$，$s = \operatorname{rank}(B)$，$r + s \leqslant n$.

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^3 = A^2$. 求证：$\operatorname{rank}(A^2) + \operatorname{rank}(I - A) = n$.

参考答案与评分标准

一、　每空 5 分，无小分.

① $\dfrac{1}{3}(x^2+2)+(x^2-1)(x^2-4)g(x)$，$\forall g\in\mathbb{R}[x]$

② $\begin{pmatrix}6&6&10&10\\10&6&6&10\\10&10&6&6\\6&10&10&6\end{pmatrix}$　③ -15　④ $\begin{pmatrix}1&-8&4&-2\\-2&1&-8&4\\4&-2&1&-8\\-8&4&-2&1\end{pmatrix}$　⑤ $\operatorname{diag}(x,x^5-x,x^5-x,x^5-x)$

二、　每小题判断正误 1 分、理由 5 分.

1. 错误．例如，$A=E_{12}$，$AA^T=E_{11}$，$A^TA=E_{22}$，两个线性方程组的解集不同.
2. 错误．例如，$A=E_{12}+E_{23}+E_{34}$，$\operatorname{rank}(A)=3$．若 $B^3=A$，则 $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(B^2)=3$，得 $\operatorname{rank}(B^k)=3,\ \forall k\geqslant 3$，与 $B^{12}=O$ 矛盾.
3. 错误．例如，$A=\operatorname{diag}(-1,1,1,0)$，$B=\operatorname{diag}(1,-1,1,0)$，则 $A^*=B^*=\operatorname{diag}(0,0,0,-1)$.
4. 错误．例如，$A=E_{12}$，$B=E_{11}$，则 $AX=B$ 有解，$XA=B$ 无解.
5. 正确．设 $X=A-I$，$Y=B+I$，则 $A-B+AB=I+XY$，$A-B+BA=I+YX$.
   由 $\operatorname{rank}(I+XY)=\operatorname{rank}(I+YX)$，得结论成立.

三、

1. 线性方程组的系数矩阵 A 满足 $\det(A)=-a(a-1)^2$.　(5 分)
   当 $a=0$ 时，解得 $x_1=1$，$x_2=1-x_3$，$\forall x_3\in\mathbb{R}$.　(3 分)
   当 $a=1$ 时，$Ax=b$ 无解.　(2 分)
   当 $a\notin\{0,1\}$ 时，$Ax=b$ 有唯一解 $A^{-1}b=(1,\frac{a}{a-1},\frac{1}{1-a})^T$.　(5 分)
2. 设 $A=P_1\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q_1$，$B=Q_1^{-1}\begin{pmatrix}B_1&B_2\\B_3&B_4\end{pmatrix}P_1^{-1}$，其中 $B_1\in\mathbb{R}^{r\times r}$.　(5 分)
   由 $AB=BA=O$，得 $B_1=O$，$B_2=O$，$B_3=O$，$\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(B_4)\leqslant n-r$.　(5 分)
   设 $B_4=Q_2^{-1}\begin{pmatrix}O&O\\O&I_s\end{pmatrix}P_2^{-1}$，$P=P_1\begin{pmatrix}I_r&\\&P_2\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}I_r&\\&Q_2\end{pmatrix}Q_1$，
   得 $A=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q$，$B=Q^{-1}\begin{pmatrix}O&O\\O&I_s\end{pmatrix}P^{-1}$.　(5 分)
3. $\begin{pmatrix}I&I+A\\O&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^2&O\\O&I-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&I\\O&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2&I\\O&I-A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^2&I\\A^2-A^3&I-A\end{pmatrix}$.　(5 分)
   $\begin{pmatrix}I&O\\A-I&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^2&I\\A^2-A^3&I-A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-A^2\\O&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&I\\O&O\end{pmatrix}$.　(5 分)
   故 $\operatorname{rank}(A^2)+\operatorname{rank}(I-A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A^2&O\\O&I-A\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}O&I\\O&O\end{pmatrix}=n$.　(5 分)