

## 2026 线性代数 A1 期末试题解答

1. (20 分) 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . 试求 (三小题选做两小题即可):

(1)  $A$  的列向量空间的一组基, 以及向量  $(1, 0, 0, 3)^T$  在此基下的坐标;

解答: 设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ , 则  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为所求,  $(1, 0, 0, 3)^T$  的坐标  $(1, -1, -1)$ .

(2)  $A$  的所有特征值和对应的特征向量;

解答:  $\varphi_A(x) = x(x-1)(x-3)^2$ , 所有特征值  $0, 1, 3, 3$ .

求解  $A\alpha = \mathbf{0}$  得特征向量  $\alpha = (0, t, t, t)^T$ , 其中  $t \neq 0$ .

求解  $A\alpha = \alpha$  得特征向量  $\alpha = (t, t, t, t)^T$ , 其中  $t \neq 0$ .

求解  $A\alpha = 3\alpha$  得特征向量  $\alpha = (0, s, t, -s-t)^T$ , 其中  $(s, t) \neq (0, 0)$ .

(3)  $A^{2026}$ .

解答: 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \beta & B \end{pmatrix}$ , 由  $B^2 = 3B$ ,  $B\beta = \mathbf{0}$ , 得  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \beta & 3^{n-1}B \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

2. (20 分) 设  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 证明下列四条件等价 (证明任意三条件等价即得满分):

(1) 线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  与  $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$  同解.

(2)  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ .

(3) 行向量空间  $R(A) = R(B) = R \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ .

(4) 存在可逆阵  $P$  使得  $B = PA$ .

证明: 记  $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ .

(1) $\Rightarrow$ (2):  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,  $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$  同解. 由解空间维数, 得 (2).

(2) $\Rightarrow$ (1):  $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解必是  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  和  $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解. 由解空间维数, 得三个线性方程组同解.

(2) $\Rightarrow$ (3): 由  $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$  和  $R(A) \subset R(C)$ , 得  $R(A) = R(C)$ . 同理,  $R(B) = R(C)$ .

(3) $\Rightarrow$ (2): 由空间维数, 得  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \text{rank}(C)$ .

(2) $\Rightarrow$ (4): 设  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ , 其中  $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$  和  $Q$  都是可逆方阵,  $P_1, P_3 \in \mathbb{R}^{m \times r}$ .

由  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r$ , 得  $\text{rank}(P_1) = \text{rank}(P_3) = r$ . 故  $P_1, P_3$  都是列满秩的, 存在可逆阵  $P$  使得  $P_3 = PP_1$ , 从而  $B = PA$ .

(4) $\Rightarrow$ (1): 由  $B = PA$ ,  $A = P^{-1}B$ , 得  $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

3. (15 分) 设  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , 矩阵  $A$  是  $V$  中的幂零阵, 且  $A$  非零. 设  $\mathcal{B}$  是  $V$  上的线性变换  $X \mapsto AX + XA$ , 设矩阵  $B = A \otimes I_2 + I_2 \otimes A$ .

(1) 求  $A$  的最小多项式.

解答:  $A \neq O$ ,  $A^2 = O \Rightarrow d_A = x^2$ .

(2) 求  $\mathcal{B}$  或者  $B$  的最小多项式 (二者求一个即可).

解答:  $A$  相似于  $J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B$  相似于  $C = J_2(0) \otimes I_2 + I_2 \otimes J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$C^2 \neq O, C^3 = O \Rightarrow d_B = d_C = x^3$ .

4. (15 分) 在直角坐标空间中, 映射  $(x, y, z) \mapsto (x+y, y+z, z+x)$  把圆  $C: x^2 + y^2 = z = 1$  映成椭圆  $E$ . 求  $E$  所在平面的方程, 并求  $E$  的半轴长、面积和对称轴方向.

解答:  $C$  上动点  $(\cos \theta, \sin \theta, 1)$  映到  $P = (\cos \theta + \sin \theta, 1 + \sin \theta, 1 + \cos \theta)$ . 得  $E$  的中心  $O(0, 1, 1)$ ,  $E$  所在平面方程  $x + 2 = y + z$ . 由  $\|OP\|^2 = 2 + \sin 2\theta$ , 得当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时,  $\overrightarrow{OP}$  是半长轴; 当  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  时,  $\overrightarrow{OP}$  是半短轴. 因此,  $E$  的半长轴长  $\sqrt{3}$ , 半短轴长 1, 面积  $\sqrt{3}\pi$ , 长轴方向  $(2, 1, 1)$ , 短轴方向  $(0, -1, 1)$ .

5. (15 分) 下面两题选做一题, 多做不另外给分:

(a) 设实二次型  $Q(x_1, \dots, x_{2026}) = \sum_{k=1}^{2024} x_k x_{k+2}$ . 求  $Q$  的正、负惯性指数.

解答:  $Q = \sum_{k \equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod{4}} (x_k + x_{k+4})x_{k+2} = \sum_{k \equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod{4}} y_k y_{k+2}$ . 当  $k \equiv 1$  或  $2 \pmod{4}$  时,  $y_k = x_k + x_{k+4}$ , 其他  $y_k = x_k$ . 得  $Q$  的正、负惯性指数都是 1012.

(b) 设  $f_1$  和  $f_2$  是线性空间  $V$  上的线性函数. 证明: 若  $f_1(x)f_2(x) = 0$  对所有  $x \in V$  成立, 则  $f_1$  和  $f_2$  二者必有一个是零函数.

证明: 若  $f_1, f_2$  都不是零函数, 则存在  $\alpha, \beta \in V$  使得  $f_1(\alpha) \neq 0, f_2(\beta) \neq 0$ . 取  $x = \alpha + \beta$ , 得  $f_1(x)f_2(x) = f_1(\alpha)f_2(\beta) \neq 0$ , 矛盾.

6. (15 分) 设  $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . 证明:  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$  当且仅当存在  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$  使得  $P^2 = P, PA = O$  且  $PB = B$ .

证明: ( $\Rightarrow$ ) 设  $A = P_1 Q_1$  和  $B = P_2 Q_2$  都是满秩分解, 则  $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$

也是满秩分解. 设  $M = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$  是可逆方阵,  $M^{-1} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ , 其中  $R_1, R_2$  的

行数分别是  $P_1, P_2$  的列数, 则  $R_2 P_1 = O, R_2 P_2 = I, P = P_2 R_2$  满足要求.

( $\Leftarrow$ )  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ PA & PB \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .