

一、 设 $\{F_n\}$ 、 $\{G_n\}$ 是两列分布函数，且对任意 $x \in \mathbb{R}$,

$$|F_n(x) - G_n(x)| \longrightarrow 0.$$

证明：对任意 $f \in C_0(\mathbb{R})$,

$$\left| \int f dF_n - \int f dG_n \right| \longrightarrow 0.$$

二、 设

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{w} (X, Y), \quad \mathbb{E}|X_n| \longrightarrow \mathbb{E}|X|, \quad \mathbb{E}|Y_n| \longrightarrow \mathbb{E}|Y|.$$

证明：

$$\mathbb{E}|X_n + Y_n| \longrightarrow \mathbb{E}|X + Y|.$$

三、 设 $\{X_i\}$ 独立同分布，记

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

证明： X_1 可积。

四、 设 $\{B_t\}_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动，定义

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq 1 + 2t\}.$$

(1) 证明 T 是停时，并求 $\mathbb{P}(T < \infty)$;

(2) 对 $\lambda > 0$ ，求 $\mathbb{E}[e^{-\lambda T}]$ 。

五、 设 $\{B_t\}_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动。证明：

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t^2}{t} = +\infty \quad \text{a.s.}$$

六、 设 $\{B_t\}_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动，并令 $X_t = |B_t|$ 。证明：对任意有界连续函数 $f \in C_b(\mathbb{R})$ 以及任意 $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid \sigma(X_s)].$$