

2026 秋季博资考几何

题目整理稿（不含解答）

一、微分流形部分

1. 设

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

并以矩阵乘法为群运算。将 H 通过坐标 (x, y, z) 与 $\mathbb{R}^3$ 识别, 则 H 是一个三维李群, 单位元对应于 $(0, 0, 0)$ 。设 X, Y, Z 分别为满足 $X_e = (\partial/\partial x)_e$ 、 $Y_e = (\partial/\partial y)_e$ 、 $Z_e = (\partial/\partial z)_e$ 的左不变向量场。

- (1) 用全局坐标标架 $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ 写出 X, Y, Z , 并计算李括号 $[X, Y]$ 、 $[Y, Z]$ 与 $[X, Z]$ 。
- (2) 求与 X, Y, Z 对偶的左不变余标架 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 并写出结构方程 $d\theta_1$ 、 $d\theta_2$ 、 $d\theta_3$ 。
- (3) 考虑秩为 2 的分布 $\mathcal{D} = \ker \theta_3 \subset TH$ 。判断 $\mathcal{D}$ 是否可积; 若可积, 试判断能否找到浸入超曲面 $S \subset H \cong \mathbb{R}^3$ 使其成为 $\mathcal{D}$ 的积分流形。

2. 设 M 为紧致、连通、无边界的光滑流形, μ 为 M 上的正体积形式。对光滑向量场 X , 定义它关于 μ 的散度 $\operatorname{div}_\mu X$ 为满足 $\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div}_\mu X)\mu$ 的唯一光滑函数。

- (1) 证明: $\int_M (\operatorname{div}_\mu X) \mu = 0$ 。
- (2) 设 $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 为 X 生成的流, $\rho \in C^\infty(M)$ 。证明: 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $\Phi_t^*(\rho\mu) = \rho\mu$, 当且仅当 $X(\rho) + \rho \operatorname{div}_\mu X = 0$ 。
- (3) 在二维环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ 上取体积形式 $\mu = dx \wedge dy$ 和向量场 $X = (2 + \sin x)\partial_x + (\cos x)\partial_y$ 。判断是否存在只依赖于 x 的光滑正函数 ρ , 使得体积形式 $\rho\mu$ 在 X 的流下保持不变。

3. 在二维环面 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ 上考虑黎曼度量 $g = du^2 + h(u)^2 dv^2$, 其中 $h: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ 为光滑的 2π -周期函数。设 ∇ 为 g 的 Levi-Civita 联络, 并采用曲率张量约定 $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ 。

- (1) 分别计算 $\nabla_{\partial_u} \partial_u$ 、 $\nabla_{\partial_u} \partial_v$ 、 $\nabla_{\partial_v} \partial_u$ 、 $\nabla_{\partial_v} \partial_v$, 并求该度量的高斯曲率 K_g 。
- (2) 不使用 Gauss-Bonnet 定理, 证明: 若 $K_g \leq 0$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上处处成立, 则 h 必为常数, 从而 g 为平坦度量。

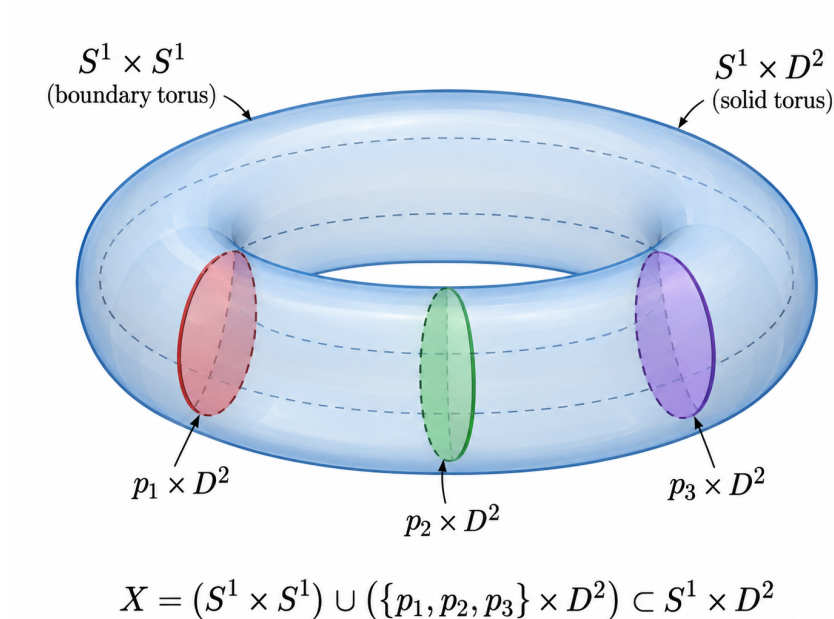
二、代数拓扑部分

1. 设 (X, d) 为含有至少两个点的连通度量空间。证明: X 不可数。

2. 证明二维 Brouwer 不动点定理：设 $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ 为闭单位圆盘，则对任意连续映射 $f : D^2 \rightarrow D^2$ ，存在 $x \in D^2$ 使得 $f(x) = x$ 。
3. 设 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 为单位圆， $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ 为闭单位圆盘，并取 S^1 上三个互异点 p_1, p_2, p_3 。把 $S^1 \times S^1$ 看作 $S^1 \times D^2$ 的边界，并令

$$X = (S^1 \times S^1) \cup (\{p_1, p_2, p_3\} \times D^2) \subset S^1 \times D^2.$$

其直观图如下：



计算 X 的基本群 $\pi_1(X)$ 以及各阶奇异同调群 $H_k(X; \mathbb{Z})$ 。

4. 设 $p \in S^1 \times S^2$ 。计算穿孔流形 $(S^1 \times S^2) \setminus \{p\}$ 的基本群，并描述其万有覆叠空间。
5. 分类 $S^1 \times \mathbb{RP}^2$ 的所有连通覆叠空间（按覆叠等价分类）。