

2026 秋季博资考分析

题目整理稿 (不含解答)

1. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 Lebesgue 可测集, 并假设对每个 $x \in A$, 极限 $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m(A \cap [x-r, x+r])}{2r}$ 存在且小于 $\frac{1}{2}$ 。证明: $m(A) = 0$ 。
2. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为 Lebesgue 可测集, 且 $m(E) < \infty$ 。设 $\mathcal{F} \subset L^1(E)$ 是一族函数, 并满足如下积分的一致绝对连续性: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 Lebesgue 可测集 $A \subset E$ 以及任意 $g \in \mathcal{F}$, 只要 $m(A) < \delta$, 便有 $\int_A |g(x)| dx < \varepsilon$ 。现设 $f_n \in \mathcal{F}$, $f \in L^1(E)$, 且 $f_n \rightarrow f$ 几乎处处于 E 。证明: $\int_E |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0$ 。
3. 设 $0 < \beta < 1$, 且 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 。证明: 对几乎处处的 $a \in \mathbb{R}$, 都有 $\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{|x-a|^\beta} dx < \infty$ 。
4. 设带状区域 $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ 。设函数 F 在 S 上全纯, 并连续延拓到闭带 $\bar{S}$, 且 F 在 $\bar{S}$ 上有界。假设对任意 $t \in \mathbb{R}$, 都有 $|F(t)| \leq 1$ 以及 $|F(t+i)| \leq 1$ 。利用极大模原理证明: 对任意 $z \in S$, 都有 $|F(z)| \leq 1$, 即 $\sup_{z \in S} |F(z)| \leq 1$ 。
5. 设 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 为单叶全纯函数, 并满足 $f(0) = 0$ 、 $f'(0) = 1$ 。记 $\Omega = f(\mathbb{D})$ 。
 - (1) 证明: $\Omega \neq \mathbb{C}$, 从而 $\partial\Omega \neq \emptyset$ 。
 - (2) 证明: $\operatorname{dist}(0, \partial\Omega) \leq 1$ 。

6. 在 $C^1[0, 1]$ 上赋予最大模范数 $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ (范数中不包含导数项), 并在 $C[0, 1]$ 上同样赋予最大模范数。定义线性算子 $T : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ 为 $Tf = f'$ 。

(1) 证明: T 的图像 $\{(f, Tf) : f \in C^1[0, 1]\}$ 在 $C^1[0, 1] \times C[0, 1]$ 的乘积范数下是闭集。

(2) 证明: T 不是有界线性算子。

(3) 证明: 在上述最大模范数下, $C^1[0, 1]$ 不是 Banach 空间。

7. 记 $X \subset L^\infty(\mathbb{R})$ 为所有满足极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-t}^t f(x) \sin x \, dx$ 存在的函数所组成的线性子空间。对 $f \in X$, 定义 $\Lambda_0(f) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-t}^t f(x) \sin x \, dx$ 。

(1) 证明: Λ_0 存在定义在整个 $L^\infty(\mathbb{R})$ 上的线性延拓 Λ , 并且 $\|\Lambda\| \leq 2$ 。

(2) 证明: 不存在 $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, 使得对所有 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ 都有 $\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) \, dx$ 。