

2026 秋季博资考代数

题目整理稿 (不含解答)

1. 设 G 为有限 p -群, $|G| = p^n$, 其中 p 为素数、 $n \geq 1$ 。称真子群 $H < G$ 为 G 的**极大子群**, 若不存在子群 K 使得 $H < K < G$; 等价地, 包含 H 的子群只有 H 与 G 。定义 G 的 Frattini 子群为 $\Phi(G) = \bigcap_{H \text{ 为 } G \text{ 的极大子群}} H$ 。

 - (1) 证明: $\Phi(G)$ 是 G 的正规子群。
 - (2) 证明: $G/\Phi(G)$ 是初等 Abel p -群, 即 $G/\Phi(G)$ 为 Abel 群, 且其中每个非单位元的阶均为 p 。
2. 分别判断是否存在阶数为 120 和 180 的非交换有限单群; 若存在, 给出存在性的证明。
- (1) 设 A, B, C 均为有限生成 Abel 群。证明有限生成 Abel 群的消去律: 若 $A \oplus B \cong A \oplus C$, 则 $B \cong C$ 。
 - (2) 设 G 为有限 Abel 群。
 - (a) 证明: 对任意正整数 $d \mid |G|$, 都存在 G 的子群 $H \leq G$, 使得 $|H| = d$ 。
 - (b) 说明上述结论对一般有限群并不成立: 举出一个有限非 Abel 群 G 和一个正整数 $d \mid |G|$, 使得 G 不存在阶为 d 的子群, 并证明你的结论。
4. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为交换含么的 Noether 局部环, 其中 $\mathfrak{m}$ 是 R 的唯一极大理想。

 - (1) 设 M 为有限生成 R -模。证明: 若 $\mathfrak{m}M = M$, 则 $M = 0$ 。
 - (2) 证明: 任意有限生成投射 R -模都是自由 R -模。
5. 分别判断整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 与 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 是否为唯一分解整环 (UFD), 并证明你的结论。
6. 设 p 为素数, $n \geq 1$ 。记 $N(n, p)$ 为有限域 $\mathbb{F}_p$ 上首一的 n 次不可约多项式的个数。

 - (1) 证明 $N(n, p) = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) p^{n/d}$ 。
 - (2) 计算 $\mathbb{F}_2$ 上首一的四次不可约多项式的个数。
7. 设 p 为素数, 记第 p 个圆分多项式为 $\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1} \in \mathbb{Z}[x]$ 。

 - (1) 证明: $\Phi_p(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。
 - (2) 求 $\Phi_p(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域, 并确定该分裂域相对于 $\mathbb{Q}$ 的 Galois 群。

- (3) 证明：对任意正整数 n ，都存在次数为 n 的 Abel Galois 扩张 $K/\mathbb{Q}$ 。可使用如下事实：对任意正整数 n ，存在素数 p 使得 $n \mid (p-1)$ 。
8. 设 $k = \mathbb{F}_q$ 为有限域， K/k 为次数为 n 的有限扩张。证明： K/k 是 Galois 扩张，并且 $\text{Gal}(K/k)$ 是循环群，由 Frobenius 自同构 $\text{Frob}_q : K \rightarrow K, x \mapsto x^q$ 生成。
9. 证明蛇形引理。具体地，设下图为 Abel 群（或同一环上的模）之间的交换图，且两行均为短正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

证明存在自然的连接同态 $\delta : \text{Ker } \gamma \rightarrow \text{Coker } \alpha$ ，使得序列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma \longrightarrow 0$$

正合。