中国科学技术大学 026 年秋季学期概率论期中考试（回忆版）

（共 6 题，满分 100 分）

1. **（20 分）**OPENAI 2026 年 10 月 6 日放出 377 个数学问题，其中编号为 261 的问题与说明：

> **261. 安德森模型中的局域化与非局域化**
>
> 解决了具有独立均匀位点势的晶格安德森（Anderson）模型的预测谱对比：在二维中，每个正无序强度都几乎必然给出纯点谱。在每个固定维度中，足够弱的正无序在具有非零谱权重的固定开区间上给出纯绝对连续谱。
>
> 安德森模型：固定整数 $d > 1$，$\{V_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ 为相互独立且均为 $[-1,1]$ 上均匀随机变量，对 $\lambda > 0$、$\omega \in \Omega$，在 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上定义有界自伴算子
>
> $$(H_\lambda \psi)(x) = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\psi(x+e_j) + \psi(x-e_j)}{2} + \lambda V_x(\omega)\psi(x),$$
>
> 其中 $e_1, \ldots, e_d$ 为坐标单位向量。

根据以上材料回答问题：

(i) 写出一个有关的概率空间（写出三要素），写出 $[-1,1]$ 上均匀随机变量的定义与分布函数；

(ii) 写出 $\{V_x\}_{x\in\mathbb{Z}^d}$ 相互独立的严格定义；

(iii) 为了理解这段材料，允许你问 AI 一个问题，写出你的问题。

2. **（10 分）**二元函数 $F(x,y) = 1 - e^{-x-y}$ 是否为某随机向量 (X,Y) 的联合分布函数？若是，求出 X 和 Y 的分布函数，若不是请说明理由。

3. **（20 分）**

(i) 设取非负整数值的随机变量 X, Y 相互独立，且 $\mathbb{E}(X+Y) < \infty$。证明

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant i); \qquad \mathbb{E}[\max\{X,Y\}] = \sum_{i=0}^{\infty} \big(1 - \mathbb{P}(X \leqslant i)\mathbb{P}(Y \leqslant i)\big).$$

(ii) 盒中装有 b 个蓝球和 r 个红球，在盒中进行不放回地随机取球，直到第一个蓝球被取出后停止。求取出的总球数的期望。

4. **（15 分）**从 $(0,0)$ 出发，每一步以 $1/2$ 概率向上、向右做对称简单随机游走。记事件 A_n：粒子到达点 (n,n)，且运动过程始终保持在直线 $y = x$ 上或其上方（经过的整数格点 (x,y) 满足 $x \leqslant y$）。试求概率 $\mathbb{P}(A_n)$。

5. **（20 分）**在 $\Omega = [0,1)$ 上赋予 Lebesgue 测度和其上 Borel 域 $\mathcal{B}$，概率空间为 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$。利用 $x \in [0,1)$ 的二进制展开，为保证表示的唯一性对有理二进制数我们取后面有无穷个 0 的展开，

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k(x)}{2^k}, \qquad \epsilon_k(x) \in \{0,1\},$$

对 $n = 1, 2, \ldots$，定义 $r_n(x) = (-1)^{\epsilon_n(x)} = 1 - 2\epsilon_n(x)$，等价地，将 $[0,1)$ 等分为 2^n 个小区间有

$$r_n(x) = (-1)^k, \qquad x \in I_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

(i) 证明三个随机变量 $r_1, r_2, r_1 r_2$ 两两独立，但不相互独立。

(ii) 令 $X_n = r_n r_{n+1}$，探索 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是否相互独立，并给出理由。

(iii) 令 $W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - X_{n+1}}{2^{n+1}}$，证明：$W$ 服从 $[0,1)$ 上均匀分布。

6. **（15 分）**在监督学习框架下，多层神经网络的作用是从原始输入 X 中学习特征表示 $Z = g(X)$，其中 g 是一元可测函数。设 X, Y 为离散型随机变量，且 $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$，记

$$\mathrm{MSE}_X = \mathbb{E}\big[(Y - \mathbb{E}[Y \mid X])^2\big], \qquad \mathrm{MSE}_Z = \mathbb{E}\big[(Y - \mathbb{E}[Y \mid Z])^2\big].$$

证明：

(1) $\mathbb{E}[Y \mid Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X] \mid Z]$；

(2) $\mathrm{MSE}_X \leqslant \mathrm{MSE}_Z$，并讨论等号成立的条件。