# 中国科学技术大学
# 2026-2027 学年泛函分析期中考试

考试时间：120 分钟　满分：110 分

| 姓名： | | 学号： | | 分数: | |
|---|---|---|---|---|---|

**注意事项：**

1. 答题前请将姓名、学号等个人信息填写清楚；
2. 请在试卷和答题纸上有用部分明确标注, 草稿纸不需要上交；
3. 请提供必要的推导过程 (第一题除外)；
4. 允许使用课上讲过的所有定理和结论但需要准确陈述；
5. 有多个小问的题目如果你不会做某一问, 也可以在下一问中使用上一问的结论, 但请注明你使用了尚未证明的结论.

**题 1** (20 分)**.** 判断下面的命题是否正确, 不需要证明或给反例.

*(a)* $L^2[0,1]$ 是 $L^1[0,1]$ 的闭子空间.

*(b)* 从有限维赋范空间 $X$ 到任意赋范空间 $Y$ 的线性算子都有界.

*(c)* 完备度量空间中可数个稠密子集的交仍是稠密的.

*(d)* 若 *Hilbert* 空间 $H$ 上线性算子 $T : H \to H$ 满足 $\langle Tx, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$, 则 $T$ 有界.

**题 2** (15 分)**.** 设 $H$ 是内积空间, $x, x_n \in H, \forall n \geq 1$. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|, \quad \lim_{n\to\infty} \langle y, x_n\rangle = \langle y, x\rangle, \quad \forall y \in H.$$

**题 3** (15 分). 设 $X$ 是 *Banach* 空间, $Y$ 是赋范空间, $T_n, T \in \mathcal{L}(X,Y)$, 且对每个 $x \in X$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\|_Y = 0.$$

证明对任意在范数拓扑下紧的非空集合 $K \subset X$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \|T_n x - Tx\|_Y = 0.$$

**题 4** (20 分). 令 $X := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$, 赋予 *sup* 度量.

*(a)* 证明 $X$ 为一个完备度量空间.

*(b)* 定义 $T : X \to X$,

$$(Tf)(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f(3x), & x \in [0, 1/3], \\ \frac{1}{2}, & x \in [1/3, 2/3], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(3x-2), & x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

证明存在唯一的 $f_* \in X$ 使得 $Tf_* = f_*$.

*(c)* 对每个 $n \in \mathbb{N}$, 计算 $f_*(3^{-n})$. 由此证明 $f_*$ 不是 *Lipschitz* 连续的.

**题 5** (20 分). 给定 $K \in C([0,1] \times [0,1])$. 在 *Banach* 空间 $X = (C[0,1], \|\cdot\|_{\sup})$ 上定义

$$T : X \to X, \quad (Tf)(t) := \int_0^1 K(t,s) f(s)\, \mathrm{d}s, \quad \forall f \in C[0,1].$$

*(a)* 证明 $T$ 是有界线性算子, 且若序列 $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset X$ 满足 $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_{\sup} \leq 1$, 则 $\{Tf_n\}_{n\geq 1}$ 有收敛子列.

*(b)* 证明存在 $g \in X$ 使得积分方程 $Tf = g$ 在 $X$ 中无解.

**题 6** (20 分). 考虑 *Hilbert* 空间 $H = \ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 < \infty\}$. 定义

$$M := \{x = (x_n)_{n\geq 1} \in H : x_{2n-1} = x_{2n},\ \forall n \geq 1\}.$$

*(a)* 证明 $M$ 是 $H$ 的闭子空间, 求 $M^\perp$ 并分别给出 $M$ 和 $M^\perp$ 的一组规范正交基.

*(b)* 在 $M$ 上定义线性泛函 $\phi : M \to \mathbb{C}$, $\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_{2n-1}$. 证明 $\phi \in M^*$ 并求 $y \in M$ 使得 $\langle x, y\rangle = \phi(x)$ 对任意 $x \in M$ 成立. 由此计算 $\phi$ 的算子范数.

*(c)* 求 $x \in H$ 在 $M$ 中的最佳逼近元并计算 $d(x, M)$.