拓扑学 25-mid（宋百林）

1. (30 分) 判断以下命题的对错：

(a) 投射 $f: X \times Y \to Y$, $f(x, y) = y$，为闭映射。

(b) 二维球面与四面体表面同胚。

(c) 满足 T_4 公理的拓扑空间也满足 T_1 公理。

(d) 度量空间是 $C1$ 空间。

(e) 若 X 局部道路连通，它的连通分支为 X 的开子集。

(f) n 维连通流形的边界是 n-1 维连通流形。

(g) 若 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ 为 $X \times X$ 的闭集，则 X 满足 $T2$ 公理。

(h) 若 X 满足 $T4$ 公理，A 为 X 的闭子集，则 A 上的连续函数可以延拓到 X 上。

(i) 紧致空间是列紧的。

(j) 射影空间为闭流形。

2. (10 分) 若 $A \subset X$ 连通，且 $A^\circ \neq \varnothing$，则 A° 连通吗？说明理由或给出反例。

3. (8 分) 若 X, Y 道路连通，则 $X \times Y$ 道路连通。

4. (10 分) $A \subset X$，$r: X \to A$ 是（连续）收缩映射，证明 r 是商映射。

5. (8 分) 证明 $S^1 \not\cong \mathbb{P}^2$，即两者不同胚。

6. (14 分) 设拓扑空间 X 紧致，Y 满足 $\mathbf{T_2}$ 公理，$f: X \to Y$ 为局部同胚，证

(a) (7 分) 任意 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 有限。

(b) (7 分) 若 Y 连通，则 f 为满射。

7. (20 分) 设 $\mathcal{F} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$，$\tau = \overline{\mathcal{F}}$，拓扑空间 $(\mathbb{R}, \tau)$ 是以 $\mathcal{F}$ 为基的拓扑空间。

(a) (4 分) 证明：$(\mathbb{R}, \tau)$ 满足 T_2、T_3 公理。

(b) (4 分) 证明：$(\mathbb{R}, \tau)$ 满足 C_1 公理。

(c) (4 分) 证明：$(\mathbb{R}, \tau)$ 不满足 C_2。

(d) (4 分) 求 $(\mathbb{R}, \tau)$ 的连通分支。

(e) (4 分) 证明：$(\mathbb{R}, \tau)$ 不可度量化。

中国科学技术大学期中试卷
2025-2026 学年第一学期

课程名称：拓扑学　　课程编号：Math 3003

考试时间：　　考试形式：闭卷

学生姓名：　　学　　号：

1. (30分）判断以下命题的对错：

(a) 投射$f: X\times Y\to Y$，$f(x,y)=y$，为闭映射。___ ✗

(b) 二维球面与四面体表面同胚。___ ✓

(c) 满足T_4公理的拓扑空间也满足T_1公理。___ ✗

(d) 度量空间是C1空间。___ ✓

(e) 若X局部道路连通，它的连通分支为X的开子集。___ ✓

(f) n维连通流形的边界是n-1维连通流形。___ ✗

(g) 若$\Delta=\{(x,x)\in X\times X|x\in X\}$为$X\times X$的闭集，则$X$满足$T2$公理。___ ✓

(h) 若X满足T4公理，A为X的闭子集，则A上的连续函数可以延拓到X上。___ ✓

(i) 紧致空间是列紧的。___ ✓

(j) 射影空间为闭流形 ___ ✓

2. (10分）若$A\subset X$ 连通，它的内部非空，则它的内部连通吗？说明你的理由或给出反例。

不连通　3'

反例　7'

3. (8分) 证明：若X, Y道路连通，则$X \times Y$ 道路连通。

X Y 道路连通 $\Rightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2$

令 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$

γ 连续

2'

~~2'~~ 4

~~0'~~ 2

4. (10分) 若$A \subset X$, X到A的一个收缩是一个连续映射$r: X \to A$，并满足条件：任意$a \in A$，$r(a) = a$，证明，收缩是商映射。

$B = r^{-1}(B) \cap A \quad \forall B \subseteq A$.

7'.

连续+满 3'.

5. （8分）证明：S^1 与 P^2 不同胚。

挖两点 2'

S^1 挖两点不连通 2'

P^2 挖两点连通 2'

证明 P^2 挖两点连通 2'

6. (14分)设拓扑空间X紧致， Y满足T2公理， $f: X \to Y$为局部同胚（即任何$x \in X$有开领域V，f 同胚的把V映为$f(x)$的开领域），则

(a) 任意 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 有限。

(b) 若Y连通，则 f为满射。

(a): f 连续 $\forall K \subseteq Y$ 紧，Y $T_2 \Rightarrow K$闭

$f^{-1}(K)$闭 $\Rightarrow$ $f^{-1}(K) \subseteq X$紧 由X紧 2'

由 f 局部同胚，$f^{-1}(y)$ 离散 3'

紧 + 离散 $\Rightarrow$ 有限 2'

(b) $U = \{y \mid \# f^{-1}(y) > 0\}$

~~$V = \{y \mid \# f^{-1}(y) = 0\}$~~

~~证 $U \cap V = \emptyset$ $U \cup V = Y$ ...~~

证 U开 + 闭，U闭 由闭映射定理 $U = f(X)$ 3'

1' Y连通 $\Rightarrow f(X) = Y$

U开 由局部同胚 3'

7. （20分）设 $\mathcal{F}=\{[a,b)\subset\mathbb{R}|a<b\}$, $\tau=\bar{\mathcal{F}}$，拓扑空间 $(\mathbb{R},\tau)$ 是以$\mathcal{F}$ 为基的拓扑空间。

(a) 证明：$(\mathbb{R},\tau)$满足T2, T3公理；

(b) 证明：$(\mathbb{R},\tau)$满足C1公理；

(c) 证明：$(\mathbb{R},\tau)$不满足C2；

(d) 求$(\mathbb{R},\tau)$的连通分支。

(e) 证明：$(\mathbb{R},\tau)$不可度量化；

(e) 证2. $\mathbb{Q}$ 是稠密子集

$\Rightarrow$ 可分 2′

但可分 + 可度量化 $\Rightarrow C_2$, 2′

矛盾

(a) T2 1′

T3 3′

(b) $\{[a, a+q)\,|\,q\in\mathbb{Q}\}$ 4

验证

(c) $\{U_n\}$ 邻域基

$a\in U_i\subseteq[a, a+q) \Rightarrow \min U_i = a$ 3′

$\Rightarrow$ U_n 不可数 1′

(d) ~~[a]~~

B 连通 $\#B>1$，取 $b_1<b_2$ 3′

$b_1\in(-\infty, b_2)\cap B$ 与 $[b_2,+\infty)\cap B$ 为B中开集

~~之 $[b_1,+\infty)\cap B = B$，即 $b_1 = \min B$~~

$\neq\phi$ $\neq\phi$ 、矛盾

$\Rightarrow$ B 完全不连通 1′

(e) 证1. Lindelöff T可度量化 $\Rightarrow C_2$ 2′

Lindelöff 2′