

25 实分析期中

1.

- (1) 简述函数 f 可测的定义
- (2) 求证: f 可测且集合 $\{f > 0\}$ 可测 $\Rightarrow f$ 可测

2.

- (1) 课本中的不可测集 N 的可测子集一定为零测集
- (2) $m(E) = 0 \Leftrightarrow E$ 的任何可测子集都是零测集
- 3. 设 $B = \{\|x\| < 1\}$ 为 R^d 中的开球且 f 非负可测, 有 $\int_B f dx = 1$

求证: $\int_B f(x)\|x\| dx < 1$

4. 求解 $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{x + \sin^k x}{1 - e^{-kx} + x^k} dx$

5. $f, f_1, \dots, f_n$ 均在 $[0, 1]$ 上可测

- (1) $f_n \xrightarrow{L_1} f$ 是否能推出 $f_n \xrightarrow{L_2} f$, 证明或者给出反例
- (2) $f_n \xrightarrow{L_2} f$ 是否能推出 $f_n \xrightarrow{L_1} f$, 证明或者给出反例
- (3) $f_n \xrightarrow{m} f$ 是否能推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} m(\{|f_n - f| > 0\}) = 0$, 证明或者给出反例

6. 设 $E_k = \{|f| \geq k\}$ 且 f 可积, 求证:

- (1) $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$
- (2) $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < +\infty$

7. g 为周期为 1 的光滑函数且 $\int_0^1 g(x) dx = 0$ 。

- (1) 求证: 对任意闭区间 $[a, b]$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(nx) dx = 0$
- (2) 对任意可积函数 f , 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f(x)g(nx) dx = 0$ 成立