25 实分析期末

一.

1. 简述 Lebesgue 外测度 m_* 的定义

2. 用定义证明其次可数可加性

3. 求证：对于满足 $d(E_1, E_2) > 0$ 的两个集合 E_1 和 E_2，有 $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$

4. 若条件改为 $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$，上述结论是否仍然成立？

二.

定义在 $[0,1]$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 和 f，求证

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} dx = 0$$

三.

求解 $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx$，写出用到的定理的名字

四.

1. 是否存在一个处处不连续的函数，它几乎处处等于一个连续函数

2.L^1 收敛是否存在子列几乎处处收敛

3.L^1 收敛是否能推出几乎处处收敛

五.

1. 设 $f(x) = 3x - x^3$, 求$V_{-2}^{2}(f)$

2. 设 $f \in BV[a,b]$，求证：存在 $g \in AC[a,b]$ 和 $h \in BV[a,b]$，满足 $h'(x) = 0 \quad \text{a.e.} \quad \text{on} \quad [a,b], \quad \text{s.t.} \quad f = g - h$

六.

1. 简述 $f \in AC[a,b]$ 的定义

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 其中 $\alpha \in R$ ，讨论 f 是否绝对连续

3. 用绝对连续定义和 $Vitali$ 覆盖引理证明：若 $f \in AC[a,b]$，且 $f'(x) = 0$ a.e.，则 f 为常数

七.

下面均考虑抽象测度，本题不需要证明所写的结论

1. 简述代数，预测度的定义，并说明如何从预测度构造外测度

2. 简述怎么从预测度构造测度空间