2025年春季学期实分析(H)期中回忆版

授课教师：任广斌

一、（10分）谈谈你对勒贝格可测集合的认识（定义，与开集、Borel集的关系）。

二、（10分）谈谈你对勒贝格可测函数的认识（定义，与特征函数、连续函数的关系，关于极限运算是否封闭）。

三、（10分）计算集合族$\Gamma := \{A \in \mathbb{R} : m(A) = 0\}$的势。

四、（10分）设C是$[0,1]$区间三等分Cantor集，函数$f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$定义为

$$f(x) = \begin{cases} +\infty & x \in C \\ (-2)^{-n} & x \in \text{Cantor集构造过程中第n次舍去的长为}3^{-n}\text{的区间}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

计算勒贝格积分$\int_0^1 |f(x)| dx$.

五、（10分）计算勒贝格积分$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}(1+\frac{x}{n})^{-n}dx$.

六、（10分）设$f : [0,1] \to \mathbb{R}$是非负的勒贝格可积函数。证明：$\sum\limits_{k=0}^{\infty} m(\{x \in [0,1] : f(x) \geq k\}) < \infty$.

七、（10分）设f_n是$[0,1]$区间上的单调增加的非负可测函数，且$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}$. 证明：存在$[0,1]$区间上的单调增加的非负简单可测函数g_n，使得$g_n(x) \leq f_n(x)$ 对任意$x \in \mathbb{R}$成立，且满足$g_n(x) \to f(x)$对a.e. $x \in \mathbb{R}$成立。

八、（10分）是否存在函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$使得其不连续点是: (1) 有理数集$\mathbb{Q}$, (2) 无理数集$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. 证明结论或举反例。

九、（20分）设$f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$是一列可测函数，且存在$g \in L^1(\mathbb{R})$使得对任意$n \in \mathbb{N}$都有$|f_n(x)| \leq g(x)$ 对a.e. $x \in \mathbb{R}$成立。现假设f_n在$\mathbb{R}$上依测度收敛到f，证明：（1）$f_n, f \in L^1(\mathbb{R})$.（2）$\|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$.