

试卷收集

2025(H) 期末

问题 10.1

(10 分) 证明下列等价:

- (i) $f \in \text{Lip}[a, b]$ 且 Lipschitz 常数为 M ;
- (ii) $f \in \text{AC}[a, b]$ 而且 $|f'(x)| \leq M$, a.e. $x \in [a, b]$.



问题 10.2

(10 分) 假设 $f \in L^2(0, +\infty)$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [0, +\infty)$$



问题 10.3

(10 分) 假设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx, \quad \forall g \in L^\infty[0, 1]$$

证明: f 是凸函数.



问题 10.4

(10 分) 下列正确是否正确 (证明或举反例):

- (1) 假设 $f, g \in \text{AC}[a, b]$, 则 $f(x)g(x) \in \text{AC}[a, b]$;
- (2) 假设 $f, g \in \text{AC}[a, b]$, 而且 $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$, 则 $f(g(x)) \in \text{AC}[a, b]$.



问题 10.5

(10 分) 设 μ 是 σ 有限测度, ν 是有限测度, 而且

$$\nu \ll \mu, \quad \nu \perp \mu$$

证明: $\nu = 0$.



问题 10.6

(10 分) 设 μ 是自然数集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ 上的计数测度, 假设 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = y \\ -1, & \text{if } x = y + 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明

$$\int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(x) d\mu(y) \neq \int_{\mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} f(x, y) d\mu(y) d\mu(x)$$

说明该结果与 Fubini 定理为何不冲突.



问题 10.7

(10 分) 假设 $f \in \text{AC}[a, b]$, 证明: f 将零测集映为零测集.



问题 10.8

(10 分) 假设 $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$, 记 $I_n = \left(r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}\right)$, 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n}(x) \in L^2[0, 1] \setminus \mathcal{R}[0, 1]$$

(注: $\mathcal{R}[0, 1]$ 通常指 $[0, 1]$ 上的 Riemann 可积函数类, 这里保持原题符号)



问题 10.9

(20 分) 假设 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是 Cantor 函数

(1) 判断下列是否正确:

(i) $f \in \text{AC}[0, 1]$;

(ii) $f \in \text{BV}[0, 1]$;

(iii) $f \in \text{Lip}[0, 1]$;

(iv) f' 几乎处处存在, 而且 $f' \in L^1[0, 1]$.

(2) 计算 $\int_0^1 f'(x) dx - f(1) + f(0)$;

(3) 计算:

(i) $\text{ess sup}_{x \in [0, 1]} f(x)$;

(ii) $\text{ess sup}_{x \in [0, 1]} f'(x)$.

(4) 计算 $V_0^1 f$ (即 f 在 $[0, 1]$ 上的全变差).

