

2025春极限理论期末考

1. $X_1, X_2, \dots$ 是一列随机变量, 证明: $X_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow E\left[\frac{X_n^2}{X_n^2+1}\right] \rightarrow 0$

2. $X_1, X_2, \dots$ 是标准正态随机变量序列 (不必独立) 证明对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| \geq (1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}\right) \rightarrow 0$$

3. $X_1, X_2, \dots$ 是一列独立正值随机变量, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty \quad a.s. \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n \wedge 1] < \infty$$

4. $\{B_t\}_{t \geq 0}$ 为标准布朗运动, $\{Z_n\}$ 是一列随机变量序列, 且

$$\frac{|Z_n - B_n|}{\sqrt{n \log \log n}} \rightarrow 0 \quad a.s.$$

$$\text{证明 } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1 \quad a.s.$$

5. $X_1, X_2, \dots$ 为独立随机变量序列, $d_1, d_2, \dots$ 非负实数且 $|X_n| \leq d_n$.

$$d_n = o(D_n) \quad \text{其中} \quad D_n^2 = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) \rightarrow \infty$$

$$\text{证明: } \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n (X_k - E[X_k]) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

6. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 i.i.d 的标准正态随机变量, 求 $n \rightarrow \infty$ 时下列随机变量极限分布并给出证明过程. (提示: 可能需要考虑二维随机变量)

$$(a) \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\left(\sum_{k=1}^n X_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(b) \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sum_{k=1}^n X_k^3}$$

