中国科学技术大学数学科学学院

2025～2026 学年第一学期期末试卷

课程名称：几何学基础　　　　**课程编号**：MATH2003

开课院系：数学科学学院　　　　**考试形式**：闭卷

考试注意事项：

- 本次是闭卷考试。
- 本试卷共 6 题。
- 答题前请仔细阅读题目。
- 尝试做所有题目以获得步骤分。
- 考试时间为两个小时。
- 严格遵守考试纪律。

一、（每问 4 分，满分 20 分）

已知空间向量 $u=(u_1,u_2,u_3)$，$v=(v_1,v_2,v_3)$ 满足

$$|u|=10,\quad u\cdot v=98,\quad u\times v=(26,1,15)$$

(1) 求平面 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 与 $v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0$ 的交线方程。

(2) 求直线 $\{tu\mid t\in\mathbb{R}\}$ 和直线 $\{tv\mid t\in\mathbb{R}\}$ 张成的平面的方程。

(3) 求 $\mathbb{RP}^2$ 中射影直线 $\{(x_1:x_2:x_3)\mid u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0\}$ 与 $\{(x_1:x_2:x_3)\mid v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0\}$ 的交点坐标。

(4) 求 $\mathbb{RP}^2$ 中过点 $(u_1:u_2:u_3)$ 和点 $(v_1:v_2:v_3)$ 的射影直线方程。

(5) 求向量 u 与 v 的夹角。

二、（满分 10 分）

判断函数 $xy=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x}$ 的图像 $\mathcal{C}$ 是否是二次曲线？如果不是，请给出完整的证明。如果是，请完成下面问题。

(1) 考虑平面二次曲线 $\mathcal{C}$：找到等距变换，使变换后曲线 $\mathcal{C}$ 的方程为标准形式之一（需要写出该标准形式）。

(2) 考虑射影二次曲线 $\mathcal{C}$：写出曲线 $\mathcal{C}$ 方程的齐次化方程，并求曲线 $\mathcal{C}$ 的所有无穷远点的齐次坐标。

三、（满分 20 分）

对于任意非零向量 (a,b,c)，求 $\mathbb{R}^3$ 中直线 $l=\{(1,1,1)+t(a,b,c)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 绕 z 轴旋转所得到的曲面方程，并分类判断曲面类型。

四、（满分 15 分）

(1) 求实数 λ, μ, ν 使得 $(11,12,21) = \lambda(1,2,0) + \mu(2,0,4) + \nu(0,6,5)$。

(2) 考虑 $\mathbb{RP}^2$ 中的点 $A_1 = (1:0:0)$，$A_2 = (0:1:0)$，$A_3 = (0:0:1)$，$A_4 = (1:2:1)$ 以及 $U = (1:2:0)$，$S = (2:0:4)$，$T = (0:6:5)$，$C = (11:12:21)$。求射影变换 $\Phi : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$，使得

$$\Phi(A_1) = U, \quad \Phi(A_2) = S, \quad \Phi(A_3) = T, \quad \Phi(A_4) = C$$

五、（满分 15 分）

(1) 给出 $\mathbb{R}^3$ 上仿射变换的定义。

(2) 设 $\mathcal{S}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中某双叶双曲面，证明：$G(\mathcal{S}) = \{\text{仿射变换} T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid T(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\}$ 在映射复合下构成一个群。

(3) 设 p, q 为 $\mathcal{S}$ 上任意两点，证明：存在 $\pm T \in G(\mathcal{S})$，使得 $T(p) = q$。

六、（满分 20 分）

(1) 设 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 为保定向等距变换（即平面刚体变换）。求证：T 要么是（沿平面某向量的）平移，要么是（以平面某点为中心的）旋转。

(2) 设 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 为保定向等距变换（即空间刚体变换）。求证：存在直线 l，使得 $T = \tau_a \circ R_{l,\theta}$，其中 $R_{l,\theta}$ 表示以直线 l 为轴、（从正向看过去）逆时针旋转角度 θ 的变换，a 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个平行于 l 方向的向量，τ_a 为沿着向量 a 的平移。
（于是每个空间刚体变换 T 都是绕某个不动轴（即满足 $T(L) = L$ 的直线 L）的“螺旋运动”）

(3) 考虑空间刚体变换 $T = \tau_b \circ R_{\omega,\alpha}$，其中 $\alpha \in (0, 2\pi)$，$R_{\omega,\alpha}$ 是“绕过原点且方向为单位向量 ω 的直线，逆时针转角度 α”的旋转，τ_b 为沿向量 b（不必是 ω 方向）的平移。由第 (2) 问知 T 实际上是一个绕某个不动轴 L 的螺旋运动。求证：L 的方程为

$$L = \left\{ \frac{1}{2} \left(b + \frac{\omega \times b}{\tan(\alpha/2)} \right) + t\omega \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

中国科学技术大学数学科学学院

2025～2026 学年第一学期期末试卷

课程名称：几何学基础　课程编号：MATH2003

开课院系：数学科学学院　考试形式：闭卷

姓名：__________　学号：____________　班级：____________

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

考试注意事项:

- 本次是闭卷考试.
- 本试卷共6题，共8页（含封面页与最后空白页）.
- 答题前请仔细阅读题目.
- 尝试做所有题目以获得步骤分.
- 考试时间为两个小时.
- 严格遵守考试纪律.

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$  $=$ 

一 (每问4分, 满分20分)

已知空间向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3),\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$满足

$$|\mathbf{u}|=10,\quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=98,\quad \mathbf{u}\times\mathbf{v}=(26,1,15).$$

(1) 求平面$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$与$v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0$的交线方程。

答案：$\boxed{\frac{x_1}{26}=\frac{x_2}{1}=\frac{x_3}{15}}$

(2) 求直线$\{t\mathbf{u}\mid t\in\mathbb{R}\}$和直线$\{t\mathbf{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$张成的平面的方程。

答案：$\boxed{26x_1+x_2+15x_3=0}$

(3) 求$\mathbb{RP}^2$中射影直线$\{(x_1:x_2:x_3)\mid u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0\}$与$\{(x_1:x_2:x_3)\mid v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=0\}$的交点坐标。

答案：$\boxed{(26:1:15)}$

(4) 求$\mathbb{RP}^2$中过点$(u_1:u_2:u_3)$和点$(v_1:v_2:v_3)$的射影直线方程。

答案：$\boxed{26x_1+x_2+15x_3=0}$

(5) 求向量$\mathbf{u}$与$\mathbf{v}$的夹角。

答案：$\boxed{arctan(\frac{\sqrt{451}}{7})=arccos(\frac{7\sqrt{5}}{50})}$

二 (满分10分)

判断函数$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x}$的图像$C$是否是二次曲线？如果不是，请给出完整的证明。如果是，请完成下面问题。

(1) 考虑平面二次曲线C：找到等距变换，使变换后曲线C的方程为标准形式之一(需要写出该标准形式)。

(2) 考虑射影二次曲线C：写出曲线C方程的齐次化方程，并求曲线C的所有无穷远点的齐次坐标。

证明. **1. 判断是否为二次曲线**

整理得

$$x^2-\sqrt{3}\,xy+\sqrt{3}=0.$$

这是关于 x,y 的二次方程，因此 C 是二次曲线（双曲线）。

2. (1) 等距变换化为标准形

方程

$$x^2-\sqrt{3}xy+\sqrt{3}=0.$$

设旋转 θ：

$$\begin{cases} x=X\cos\theta-Y\sin\theta, \\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta. \end{cases}$$

代入二次项 $x^2-\sqrt{3}xy$，令 XY 项系数为零：

$$-\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta=0 \;\Rightarrow\; \tan 2\theta=-\sqrt{3}.$$

取 $2\theta=120^\circ$，$\theta=60^\circ$。此时 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

计算新二次项系数：
X^2 系数：$\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$。
Y^2 系数：$\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$。
无 XY 项，常数项为 $\sqrt{3}$。

旋转后方程为

$$-\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{2}Y^2+\sqrt{3}=0.$$

化为标准双曲线形式：

$$\frac{X^2}{2\sqrt{3}}-\frac{Y^2}{2\sqrt{3}/3}=1.$$

因此等距变换为旋转 $\theta = 60^\circ$，标准形式如上。

3. (2) 齐次化与无穷远点

原方程齐次化：令 $x = X/Z,\ y = Y/Z$，代入

$$\frac{X^2}{Z^2} - \sqrt{3}\frac{XY}{Z^2} + \sqrt{3} = 0,$$

乘以 Z^2 得

$$X^2 - \sqrt{3}XY + \sqrt{3}Z^2 = 0.$$

无穷远点对应 $Z = 0$，代入得

$$X^2 - \sqrt{3}XY = X(X - \sqrt{3}Y) = 0.$$

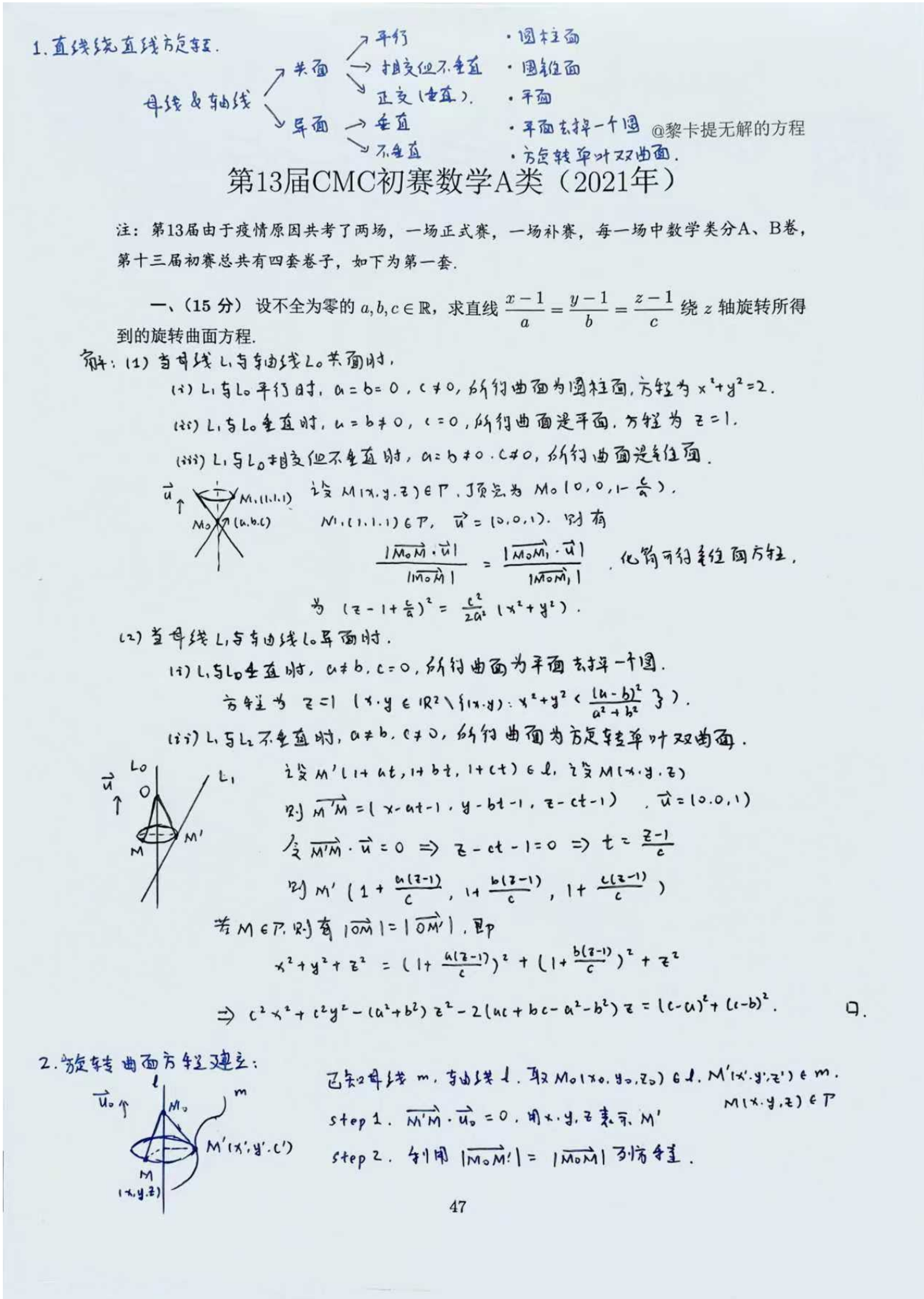
得到两个无穷远点：

$$(0:1:0), \quad (\sqrt{3}:1:0).$$

□

三 (满分20分)

对于任意非零向量(a,b,c), 求$\mathbb{R}^3$中直线$l=\{(1,1,1)+t(a,b,c)\mid t\in\mathbb{R}\}$绕$z$轴旋转所得到的曲面方程，并分类判断曲面类型。



1. 直线绕直线旋转.

母线 & 轴线：共面 → 平行、相交但不垂直、正交（垂直）；异面 → 垂直、不垂直

· 圆柱面 · 圆锥面 · 平面 · 平面去掉一个圆 · 旋转单叶双曲面.

@黎卡提无解的方程

第13届CMC初赛数学A类（2021年）

注：第13届由于疫情原因共考了两场，一场正式赛，一场补赛，每一场中数学类分A、B卷，第十三届初赛总共有四套卷子，如下为第一套.

一、(15 分) 设不全为零的 $a,b,c\in\mathbb{R}$，求直线 $\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{b}=\frac{z-1}{c}$ 绕 z 轴旋转所得到的旋转曲面方程.

解：(1) 当母线 L_1 与轴线 L_0 共面时，

(i) L_1 与 L_0 平行时，$a=b=0$，$c\neq0$，所得曲面为圆柱面，方程为 $x^2+y^2=2$.

(ii) L_1 与 L_0 垂直时，$a=b\neq0$，$c=0$，所得曲面是平面，方程为 $z=1$.

(iii) L_1 与 L_0 相交但不垂直时，$a=b\neq0$，$c\neq0$，所得曲面是锥面.

设 $M(x,y,z)\in\Gamma$，顶点为 $M_0(0,0,1-\frac{c}{a})$，$M_1(1,1,1)\in\Gamma$，$\vec{u}=(0,0,1)$. 则有

$$\frac{|\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{u}|}{|\overrightarrow{M_0M}|}=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{u}|}{|\overrightarrow{M_0M_1}|}$$

化简可得锥面方程，为 $(z-1+\frac{c}{a})^2=\frac{c^2}{2a^2}(x^2+y^2)$.

(2) 当母线 L_1 与轴线 L_0 异面时.

(i) L_1 与 L_0 垂直时，$a\neq b$，$c=0$，所得曲面为平面去掉一个圆.

方程为 $z=1$ $(x,y\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):x^2+y^2<\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}\})$.

(ii) L_1 与 L_2 不垂直时，$a\neq b$，$c\neq0$，所得曲面为旋转单叶双曲面.

设 $M'(1+at,1+bt,1+ct)\in l$，设 $M(x,y,z)$

则 $\overrightarrow{M'M}=(x-at-1,y-bt-1,z-ct-1)$，$\vec{u}=(0,0,1)$

令 $\overrightarrow{M'M}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow z-ct-1=0\Rightarrow t=\frac{z-1}{c}$

则 $M'(1+\frac{a(z-1)}{c},1+\frac{b(z-1)}{c},1+\frac{c(z-1)}{c})$

若 $M\in\Gamma$，则有 $|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OM'}|$，即

$$x^2+y^2+z^2=(1+\frac{a(z-1)}{c})^2+(1+\frac{b(z-1)}{c})^2+z^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2+c^2y^2-(a^2+b^2)z^2-2(ac+bc-a^2-b^2)z=(c-a)^2+(c-b)^2.\quad\square$$

2. 旋转曲面方程建立：

已知母线 m，轴线 l. 取 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$，$M'(x',y',z')\in m$，$M(x,y,z)\in\Gamma$

step 1. $\overrightarrow{M'M}\cdot\vec{u_0}=0$，用 x,y,z 表示 M'

step 2. 利用 $|\overrightarrow{M_0M'}|=|\overrightarrow{M_0M}|$ 列方程.

47

证明. $\square$

四 (满分15分)

(1) 求实数λ,μ,ν使得$(11,12,21)=\lambda(1,2,0)+\mu(2,0,4)+\nu(0,6,5)$。

(2) 考虑$\mathbb{RP}^2$中的点$A_1=(1:0:0),A_2=(0:1:0),A_3=(0:0:1),A_4=(1:2:1)$ 以及$\mathsf{U}=(1:2:0)$，$\mathsf{S}=(2:0:4)$，$\mathsf{T}=(0:6:5)$，$\mathsf{C}=(11:12:21)$。求射影变换$\Phi:\mathbb{RP}^2\to\mathbb{RP}^2$，使得

$$\Phi(A_1)=\mathsf{U},\ \Phi(A_2)=\mathsf{S},\ \Phi(A_3)=\mathsf{T},\ \Phi(A_4)=\mathsf{C}.$$

证明. 1.

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(3,4,1).$$

2. 射影变换的矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 作用在齐次坐标上。由于齐次坐标可以整体缩放，前三个条件可以确定各列的比。

1. 由前三点确定列比例

$(1:0:0)\mapsto(1:2:0)$ 说明

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}$$

与 $(1,2,0)$ 成比例，设比例系数为 λ，则

$$a_{11}=\lambda\cdot 1,\quad a_{21}=\lambda\cdot 2,\quad a_{31}=\lambda\cdot 0.$$

所以第一列：$\lambda(1,2,0)^T$。

类似地，$(0:1:0)\mapsto(2:0:4)$ 设比例系数 μ：

$$a_{12}=\mu\cdot 2,\quad a_{22}=\mu\cdot 0,\quad a_{32}=\mu\cdot 4,$$

第二列：$\mu(2,0,4)^T$。

$(0:0:1)\mapsto(0:6:5)$ 设比例系数 ν：

$$a_{13}=\nu\cdot 0,\quad a_{23}=\nu\cdot 6,\quad a_{33}=\nu\cdot 5,$$

第三列：$\nu(0,6,5)^T$。

因此

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 2\mu & 0\\ 2\lambda & 0 & 6\nu\\ 0 & 4\mu & 5\nu\end{pmatrix}.$$

2. 利用第四点定比例

$(1:2:1)\mapsto(11:12:21)$ 等价于

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+4\mu\\ 2\lambda+6\nu\\ 8\mu+5\nu\end{pmatrix}$$

与 $(11,12,21)$ 成比例。
设比例为 k，则：

$$\lambda+4\mu=11k, \tag{1}$$
$$2\lambda+6\nu=12k, \tag{2}$$
$$8\mu+5\nu=21k. \tag{3}$$

根据第一问得 $\lambda:\mu:\nu:k=1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=3:2:1:1$。
所以所求射影变换的矩阵（相差非零数乘下）为

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 6 & 0 & 6\\ 0 & 8 & 5\end{pmatrix}.$$

$\square$

五 (满分15分)

(1) 给出$\mathbb{R}^3$上仿射变换的定义。

(2) 设$\mathcal{S}$为$\mathbb{R}^3$中某双叶双曲面，证明：$G(\mathcal{S}) = \{$仿射变换$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 | T(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\}$在映射复合下构成一个群。

(3) 设p, q为$\mathcal{S}$上任意两点，证明：存在$T \in G(\mathcal{S})$，使得$T(p) = q$。

证明. 1,2略。注意2中乘法封闭性、单位元存在性、乘法结合律、逆元存在性必须都验证。

3.**Step 1:**首先利用仿射变换(或者等距变换)将曲面方程变为$a^2x^2 - b^2y^2 + c^2z^2 + 1 = 0$, $a, b, c \neq 0$。进一步利用仿射变换$x \mapsto x/a$, $y \mapsto y/b$, $z \mapsto z/c$将曲面方程变为$x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$。只需对这一标准型曲面证明3即可(说明原因！)。

Step 2: 因为曲面$x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$在绕y轴旋转下不变，若p, q有相同y坐标则第三问可用旋转达成。故可假设p, q在xy平面上。故问题归结为：设p, q为双曲线$C_0 : x^2 - y^2 = 1$上的两个点，在存在$\mathbb{R}^2$上的线性变换T使得$T(C_0) = C_0$且$T(p) = q$。

Step 3: 进一步做仿射变换使得C_0方程变为$xy = 1$。任取 $p, q \in C$。证明存在仿射变换 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，满足 $T(C) = C$ 且 $T(p) = q$。

证明

1. 保 C 的线性变换形式

设 T 为线性变换

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

条件：对任意 (x, y) 满足 $xy = 1$，有 $XY = 1$。

将 $y = 1/x$ 代入：

$$\left(ax + \frac{b}{x}\right)\left(cx + \frac{d}{x}\right) = 1, \quad \forall x \neq 0.$$

展开得

$$ac\,x^2 + (ad + bc) + \frac{bd}{x^2} = 1.$$

比较系数：

$$ac = 0, \quad bd = 0, \quad ad + bc = 1.$$

解得两种可能：

- 类型 I：$b = c = 0$，$ad = 1$，即 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$，$a \neq 0$。

- 类型 II：$a=d=0$，$bc=1$，即 $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}$，$b\neq 0$。

容易验证这些矩阵均保 $xy=1$。

3. 传递性

将 C 参数化为 $p(t)=(t,1/t)$，$t\neq 0$。设 $p=p(t)$，$q=p(s)$。

- 若 t,s 同号，取类型 I 中 $a=s/t$：

$$\begin{pmatrix} s/t & 0 \\ 0 & t/s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ 1/s \end{pmatrix}.$$

- 若 t,s 异号，取类型 II 中 $b=ts$：

$$\begin{pmatrix} 0 & ts \\ (ts)^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ 1/s \end{pmatrix}.$$

因此对任意 $p,q\in C$，存在 T 在保 C 的线性群中将 p 映至 q。 $\square$

六 (满分20分)

(1) 设$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为保定向等距变换(即平面刚体变换)。求证：$\phi$要么是(沿平面某向量的)平移，要么是(以平面某点为中心的)旋转。

(2) 设$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$为保定向等距变换(即空间刚体变换)。求证：存在直线l，使得$T=\tau_{\mathbf{a}}\circ R_{l+,\theta}$，其中$R_{l+,\theta}$表示以直线$l$为轴，(从正向看过去)逆时针旋转$\theta$角度的变换，$\mathbf{a}$ 是$\mathbb{R}^3$中一个平行于l方向的向量，$\tau_{\mathbf{a}}$ 为沿着向量$\mathbf{a}$的平移。

【于是每个空间刚体变换T都是绕某个不动轴(即满足$T(L)=L$的直线)L的“螺旋运动”】

(3) 考虑空间刚体变换 $T=\tau_{\mathbf{b}}\circ R_{\omega,\alpha}$，$\alpha\in(0,2\pi)$，其中$R_{\omega,\alpha}$是“绕过原点且方向为单位向量$\omega$的直线，逆时针转$\alpha$角度”的旋转，$\tau_{\mathbf{b}}$为沿向量$\mathbf{b}$(不必是$\omega$方向)的平移. 由第(2)问知$T$实际上是一个绕某个不动轴$L$的螺旋运动。求证：$L$的方程为

$$L=\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\frac{\omega\times\mathbf{b}}{\tan(\alpha/2)})+t\omega\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}.$$

(空白页，供继续答题使用)

六 (满分20分)

(1) 设$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为保定向等距变换(即平面刚体变换)。求证：$\phi$要么是(沿平面某向量的)平移，要么是(以平面某点为中心的)旋转。

(2) 设$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$为保定向等距变换(即空间刚体变换)。求证：存在直线l，使得$T=\tau_{\mathbf{a}}\circ R_{l+,\theta}$，其中$R_{l+,\theta}$表示以直线$l$为轴，(从正向看过去)逆时针旋转$\theta$角度的变换，$\mathbf{a}$ 是$\mathbb{R}^3$中一个平行于l方向的向量，$\tau_{\mathbf{a}}$ 为沿着向量$\mathbf{a}$的平移。

【于是每个空间刚体变换T都是绕某个不动轴(即满足$T(L)=L$的直线)L的“螺旋运动”】

(3) 考虑空间刚体变换 $T=\tau_{\mathbf{b}}\circ R_{\omega,\alpha}$，$\alpha\in(0,2\pi)$，其中$R_{\omega,\alpha}$是“绕过原点且方向为单位向量$\omega$的直线，逆时针转$\alpha$角度”的旋转，$\tau_{\mathbf{b}}$为沿向量$\mathbf{b}$(不必是$\omega$方向)的平移. 由第(2)问知$T$实际上是一个绕某个不动轴$L$的螺旋运动。求证：$L$的方程为

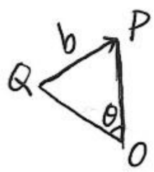
$$L=\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\frac{\omega\times\mathbf{b}}{\tan(\alpha/2)})+t\omega\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}.$$

(1) 只需证:若T不是平移则存在不动点。设 $T=\tau_{\vec b}\circ S_\theta$, $\tau_{\vec b}$为沿$\vec b$的平移

S_θ为逆时针旋转θ度,则不动点P如图:

作等腰三角形PQO满足 $\overrightarrow{QP}=\vec b$, O为原点,

$\angle QOP=\theta$, $|OQ|=|OP|$, 则P为T的不动点.



(*)

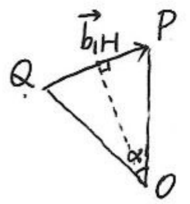
(2) 若T为平移,则沿平移方向直线为不动轴。

若 $T=\tau_{\vec b}\circ \cancel{S_\theta} R_{\omega,\alpha}$, 作分解 $\vec b=\vec b_1+\vec b_2$, $\vec b_1\perp\omega$, $\vec b_2\parallel\omega$, 则

$T=\tau_{\vec b_1}\circ\tau_{\vec b_2}\circ R_{\omega,\alpha}$. 由(1)知 $\tau_{\vec b_2}\circ R_{\omega,\alpha}$ 为绕(*)中过P且以ω为方向的直线为轴的旋转, (2)得证.

(3) 由(2)中知,设(*)在ω的法平面上,则P过T的不动轴,下面求P的位置:

由$\|\omega\|=1$知 $\vec b_1=\vec b-(\vec b,\vec\omega)\vec\omega$. 由图(*)知



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}$

$=\dfrac{\|\vec b_1\|}{2\tan\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\omega\times\vec b_1}{\|\omega\times\vec b_1\|}+\dfrac{\vec b_1}{2}$

$=\dfrac{\omega\times\vec b}{2\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}(\vec b-(\vec b,\omega)\vec\omega)$

故不动轴方程为 L: $\overrightarrow{OP}+t\omega=\frac{1}{2}(\vec b+\dfrac{\omega\times\vec b}{2\tan\frac{\alpha}{2}})+t\omega$, $t\in R$. □