《凸优化》期末考试

2026-1-17　8:30-10:30

姓名：________________　学号：________________

1.【**10 分**】证明如下命题:

(i)【**5 分**】如果 C 是仿射集且 $x_0 \in C$，则集合 $V = \{x - x_0 \mid x \in C\}$ 是一个子空间。

(ii)【**5 分**】如果 $C \subset \mathbb{R}^n$ 是凸集，则其在透视函数下的原像 $P^{-1}(C) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x/t \in C,\ t > 0\}$ 是凸集。

2.【**10 分**】证明：$f(X) = -\log\det X$ 是凸函数，其中 $X \in \mathbb{S}^n_{++}$。

3.【**20 分**】求解如下问题:

(i)【**10 分**】计算 $f(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]}$ 的共轭函数，其中 $x_{[i]}$ 是 x 中第 i 大的元素，$x \in \mathbb{R}^n$。

(ii)【**10 分**】令 $f(X) = -\mathrm{rank}(X)$，其中 $X \in \mathbb{S}^n_{+}$，证明：$f(X)$ 是拟凸函数。

4.【**10 分**】考虑优化问题:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x^2 + 1 \\ \text{subject to} \quad & (x-2)(x-4) \le 0. \end{aligned}$$

(i)【**5 分**】写出此优化问题的 Lagrange 函数，Lagrange 对偶函数以及 Lagrange 对偶问题。

(ii)【**5 分**】求解 Lagrange 对偶问题，判断强对偶性是否成立。

5.【**20 分**】考虑优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \ge e^{x_1}. \end{aligned}$$

(i)【**10 分**】令 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 是此优化问题的最优解，写出 KKT 条件。

(ii)【**10 分**】证明：$x_2^* = e^{x_1^*}$ 且 $-2 < x_1^* < 0$。

6.【**20 分**】采用任意范数 $\|\cdot\|$ 时，规范化的最速下降方向为

$$\Delta x_{\mathrm{nsd}} = \arg\min\left\{\nabla f(x)^\top v \;\middle|\; \|v\| \le 1\right\},$$

相应的非规范化的最速下降方向为 $\Delta x_{\mathrm{sd}} = \|\nabla f(x)\|_* \Delta x_{\mathrm{nsd}}$，其中 $\|\cdot\|_*$ 表示对偶范数，定义为 $\|z\|_* = \sup\{z^\top x \mid \|x\| \le 1\}$。

(i)【**5 分**】证明：采用 l_2 范数时，$\Delta x_{\mathrm{sd}} = -\nabla f(x)$。

(ii)【**15 分**】考虑二次范数，即对任意的 z，$\|z\|_P = (z^\top P z)^{1/2}$，其中 P 为正定矩阵。求采用二次范数时的 Δx_{nsd} 和 Δx_{sd}。

7.【**10 分**】考虑如下优化问题，

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (1/2)x^\top Px + q^\top x + r \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

其中 $P \in \mathbb{S}_+^n$，$A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A) = p \leq n$。证明：如果 $P \succ 0$，则该优化问题存在唯一最优解。