

2025 年中科大复分析期中考试

一 (10 分) 计算 $|1 + \cos(2025) + i \sin(2025)|$ 与 $\text{Arg}(1 + \cos(2025) + i \sin(2025))$.

二 (25 分) 判断说明题 (给出判断并说明理由)

- 1) 是否存在 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上的解析函数 $f(z)$ 满足 $f'(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{C}^*$?
- 2) 是否存在 $f \in H(B(0, 1))$ 满足 $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-2025}$ 对所有 $n = 2, 3, 4, \dots$ 成立?
- 3) 设 $f \in H(B(0, 1))$ 且 $f'(z) \neq 0, \forall z \in B(0, 1) = D$. 问 f 是否一定为 D 上的单叶解析函数?
- 4) 方程 $z^4 + 2z^3 - 2z + 10 = 0$ 在第 II 象限有 1 个解.
- 5) 是否存在 $B(0, 1)$ 上的解析函数 $f(z)$ 满足: $\forall z \in B(0, 1), f(z)^2 + 2zf(z) + 1 \equiv 0$?

三 (8 分) 计算积分:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^n(z-2025)}, \quad n \geq 0.$$

四 (12 分) 计算积分:

$$\Phi(z) = \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta-2025)(\zeta-z)}, \quad |z| \neq 1.$$

五 (10 分) 设 $z/(e^z - 1)$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

这里, B_n 被称为第 n 个 Bernoulli 数.

1. 证明: $\forall j \geq 1,$

$$\sum_{n=0}^j \binom{j+1}{n} B_n = 0;$$

2. 证明: 当 $k \geq 1$ 时, $B_{2k+1} = 0$.

六 (5 分) 求整函数 $e^z - 4z^{2025} + 1$ 在 $B(0, 1)$ 中的零点个数.

七 (10 分) 写出将单位圆盘 $B(0, 1)$ 一一对应映为单位圆盘 $B(0, 1)$ 的所有分式线性变换并证明之.

八 (15 分) 设 f 为 $B(0, 1)$ 上的全纯函数, $f(0) = 0$. 已知

$$\text{Re} f(z) \leq \frac{2025}{2}, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

证明:

$$|f(z)| \leq \frac{2025|z|}{1-|z|}, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

九 (5 分) 找到所有满足 $f(z)^2 + g(z)^2 \equiv 1$ 的整函数对 $(f(z), g(z))$, 并给出证明.

