

**中国科学技术大学2025年春
复分析期末考试试卷**

2025年6月17日

姓名: _____ 系别: _____ 学号: _____

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									
阅卷人									

1. (15分) 设 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(2z-1)}$. 分别求 $f(z)$ 在 $\frac{1}{2} < |z| < 1$ 和 $1 < |z| < \infty$ 中的 Laurent 展开式.

2. (15分) 设 $f(z) = \frac{\cot z}{z^2}$.

(1) 求 $f(z)$ 的所有奇点, 并指出其类型 (包含 ∞ 点).

(2) 求 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的留数.

3. (20分) 计算下列积分.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1)$

4. (10分) 用 Liouville 定理证明代数学基本定理.

5. (10分) 设 f 为整函数, 且满足 $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $f(i\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. 证明: f 为偶函数.

6. (10分) 设 f, g 为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 且当 z 不是 f 或 g 的极点时, $|f(z)| < |g(z)|$. 证明: 存在常数 $\alpha \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z) = \alpha g(z)$.

7. (10分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在单位圆盘中全纯, 其中对所有 $n \geq 0$ 有 $a_n \geq 0$. 定义

$$\mathcal{F} = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n : f(z) \text{ 在单位圆盘中全纯且对所有的 } n, |c_n| \leq a_n\}$$

证明 $\mathcal{F}$ 在单位圆盘中内闭一致有界.

8. (10分) 设 D_1, D_2 为非全平面的单连通区域, $a \in D_1, b \in D_2$. 设 $f: D_1 \rightarrow D_2$ 为单叶全纯函数且 $f(D_1) = D_2$, $f(a) = b$. 若全纯映射 $g: D_1 \rightarrow D_2$ 满足 $g(a) = b$, 证明: $|g'(a)| \leq |f'(a)|$.