第 17 章 试卷收集

17.1 2025 春复分析 (H) 期末

问题 17.1

计算

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2025-\infty i}^{2025+\infty i}\frac{617^s}{s(s+1)}\,\mathrm{d}s.$$

问题 17.2

给出 $\dfrac{\sin \pi z}{\pi}$ 的 Hadamard 展开.

问题 17.3

计算 $z^6 - 2015z^{17} + z^{35} - 2 = 0$ 在单位圆内根的个数.

问题 17.4

定义 $\zeta(s;a)$ 为

$$\zeta(s;a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s},$$

这里 $a \neq 0, -1, -2, \cdots$. 证明:

- 这定义了一个 $\Re(z) > 1$ 上的全纯函数.
- 证明:$\Gamma(s)\zeta(s;a) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

问题 17.5

利用函数 $f(w) = w^{s-1}e^{-w}$ 的留数定理, 解决如下问题:

- 若 $0 < \Re(s) < 1$, 计算

$$\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-ix}\,\mathrm{d}x.$$

- 证明:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x^n}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}.$$

问题 17.6

记 $\mathbb{D}^* = \{z\colon |z| < 1\} - \{0\}$. 若 $f\colon \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}$ 是全纯单射, 证明: 一定存在非负整数 m 和复数 a, 满足

$$\lim_{z\to 0} f(z)z^m = a.$$

问题 17.7

证明: 复平面上一一映射的整函数是一次多项式.

问题 17.8

证明: 单连通开集 $V \subseteq \mathbb{C}$ 上的有两个不动点的自同构是恒等映射.