

2025 秋组合学期中考回忆版及部分解答

1. 算两个简单的组合数表达式，其中一个为 $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$
2. ?
3. 计算圆周上 n 个点 non-crossing 配对的个数
4. 计数将 $[n]$ 排成一列且在排列中不出现 $(i, i+1)$ 的排列数
5. 一族集合每一个大小都是 k ，两两之间有交，并且这些两两之交互相没有包含关系，求证集合数至多是 $1 + \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$
6. $PG(q)$ 中无三点共线的集合至多为 $q+2$ 元，进一步当 q 为奇数时，无三点共线的集合最多为 $q+1$ 元的。
7. 给出两族不同的的显式构造，使得图是 C_4 -free 的并且 $|E(G)| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$

解答：3. 卡特兰数

4. 使用容斥原理，在有 k 对 $(i, i+1)$ 时，相当于对 $n-k$ 个对象进行排列
5. 取出一个集合 A ，对剩下集合与 A 的交集使用 Sperner 定理
6. 根据 Design 的定义就能得到 $q+2$. 对于 q 为奇数，假设有 $q+2$ 元，考虑计数 $r = \#\{(a_1, a_2, b) : a_1, a_2 \in S, b \notin S, \text{三点共线}\}$ ，会有 $\binom{q+2}{2}(q-1) \leq r \leq \lfloor \frac{q+2}{2} \rfloor (q^2-1)$
7. 一个构造 $\mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p$ 在讲义 Turan Type Problem 一节，其中提及 There are several other constructions by using projective planes and Sidon sets.