

# 2025 秋组合学期中考回忆版及部分解答

1. 算两个简单的组合数表达式，其中一个是  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$
2. ?
3. 计算圆周上  $n$  个点 non-crossing 配对的个数
4. 计数将  $[n]$  排成一列且在排列中不出现  $(i, i + 1)$  的排列数
5. 一族集合每一个大小都是  $k$ , 两两之间有交, 并且这些两两之交互相没有包含关系, 求证集合数至多是  $1 + \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$
6.  $PG(q)$  中无三点共线的集合至多为  $q + 2$  元, 进一步当  $q$  为奇数时, 无三点共线的集合最多为  $q + 1$  元的.
7. 给出两族不同的显式构造, 使得图是  $C_4$ -free 的并且  $|E(G)| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$

解答: 3. 卡特兰数

4. 使用容斥原理, 在有  $k$  对  $(i, i+1)$  时, 相当于对  $n-k$  个对象进行排列
5. 取出一个集合  $A$ , 对剩下集合与  $A$  的交集使用 Sperner 定理
6. 根据 Design 的定义就能得到  $q+2$ . 对于  $q$  为奇数, 假设有  $q+2$  元, 考虑计数  $r = \#\{(a_1, a_2, b) : a_1, a_2 \in S, b \notin S, 三线共线\}$ , 会有  $\binom{q+2}{2}(q-1) \leq r \leq \left[\frac{q+2}{2}\right](q^2 - 1)$
7. 一个构造  $\mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p$  在讲义 Turan Type Problem 一节, 其中提及 There are several other constructions by using projective planes and Sidon sets.