2025年中国科大数学科学学院夏令营考试

（回忆版）

2025年7月

1 数学分析

1、设$f(x,y)$在$(0,0)$的某个邻域上具有二阶连续的偏导数，且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$. 计算$f(0,0)$以及$f$在$(0,0)$处的各个一阶、二阶偏导数。

2、设$f(x)$在$\mathbb{R}$上有定义，其原函数记作$F(x)$, 反函数为$f^{-1}(x)$. 计算$\int_{\mathbb{R}} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$.

3、设集合$D\subset\mathbb{R}^2$, 证明: D是有界闭集当且仅当D上的任意连续函数都有界。

4、设$F(x,y,z)=0$是一个光滑闭曲面，证明：存在两点的切平面是平行的，且这两点的连线与切平面垂直。

5、设$f\in C^\infty(\mathbb{R}), f(0)=0$, 计算$\frac{f(x)}{x}$的$n$阶导数在$x\to 0$时的极限。

6、设$f(x)$在$\mathbb{R}$上有定义, 且对任意$x>0$有$f(x)\geq 1/x$. 证明: $f(x)$没有原函数。

7、$f(x,y)$是二阶连续可微的，且满足$f(0,0)=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x+x^2+y^2$. 设$D$是单位闭圆盘，计算$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2 高等代数

1、设$V=\mathbb{C}^{2\times 2}$是在通常矩阵加法与数乘在$\mathbb{R}$上的线性空间，令线性变换$A(X)=(1+i)X^*$. 计算A的特征多项式、极小多项式以及特征值、特征向量。

2、线性空间$V=\mathbb{R}^{n\times n}$上定义内积$\langle X,Y\rangle=\mathrm{tr}(X^\top Y)$. 设线性映射$\mathcal{A}(X)=AX+XA$. 求所有$n$阶方阵$A$使得$\mathcal{A}$是正交变换。

3、设A,B是半正定Hermite方阵，证明: $\mathrm{tr}((A+B)^{2025})\geq\mathrm{tr}(A^{2025})+\mathrm{tr}(B^{2025})$.

4、设$a,b,c>0$且满足$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=2(a^2+b^2+c^2)$. 证明: 过点$(1,1,1)$可作三条相互垂直的直线与椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$相切。

3 实变函数

1、设f为可测函数，$E\subseteq\mathbb{R}^n$是勒贝格可测集, $1\leq p<\infty$, m为$\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度. 证明:

$$\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} pt^{p-1}m(\{x\in E:|f(x)|>t\})\mathrm{d}t.$$

2、设$f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 问：是否对任意$p\in(1,+\infty)$, 均有$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$?

3、设$f:[0.1]\to\mathbb{R}$是a.e.有限的可测函数，定义

$$f^*(t)=\inf\{s\in\mathbb{R}:m(\{x\in[0,1]:|f(x)|>s\})\leq x\}.$$

证明: 对任意$s \in (0,1)$有

$$m(\{x \in (0,1) : f^*(x) > s\}) = m(\{x \in [0,1] : |f(x)| > s\}).$$

4 复变函数

1、计算题

(1) 在$\mathbb{C}$上求解方程组

$$x+y+z=0, \quad x^2+y^2+z^2=0, \quad x^3+y^3+z^3=3.$$

(2) 设$0<x<2\pi$, 计算级数$\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\cos nx}{n}$.

(3) 设$a\in(0,1)$, 计算积分 $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}} \mathrm{d}x$.

2、是否存在双全纯映射f将$\{|z|>1\}$映射为$\mathbb{C}\backslash\{0\}$? 证明你的结论.

3、证明：方程$e^z=z$在$\mathbb{C}$有无穷个解。

5 近世代数

1、设S为$\{1,2,3\}$的幂集，定义对称差运算$A\delta B := (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

(1) 证明: (S,Δ)是交换群.

(2) 求S中的单位元和各元素的逆元。

2、考虑$G=S_4$在幂集$\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$下的自然作用。

(1) 计算$\{1,2\}$的稳定子群$G_{\{1,2\}}$.

(2) 求所有轨道以及轨道中元素的个数.

3、多项式x^2+4x+2是否在$\mathbb{Q}[x]$中可约？并对任意正整数n举出一个在$\mathbb{Q}[x]$中不可约的n次多项式。

6 微分几何

1、求$\mathbf{r}(t)=(t,\sqrt{2}\ln t,t^{-1})$的曲率、挠率。

2、求$\mathbf{r}(u,v)=(u+v,u-v,2uv)$的高斯曲率、平均曲率、主曲率。

3、已知曲面的第一、第二基本形式为$I=\cos^2\theta \mathrm{d}u\mathrm{d}u+\sin^2\theta \mathrm{d}v\mathrm{d}v$, $II=\cos\theta\sin\theta \mathrm{d}u\mathrm{d}u-\cos\theta\sin\theta \mathrm{d}v\mathrm{d}v$. 据此计算$\theta$满足什么微分方程?

4、求$\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,f(u))$的测地线。