

中国科学技术大学试卷

2025 春季学期

代数数论 (MATH5012P)

一. (30分) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \neq 1$ 是无平方因子整数.

1.(2分) 写出 $\mathcal{O}_K, \Delta_K$.

2.(5分) 写出素数 p 在 K 中分歧, 分裂, 惯性的充要条件.

3.(3分) $d < 0$, 写出 $\mathcal{O}_K^\times$.

4.(5分) $d = -5$, 计算 h_K ; 求 $x^2 + 5 = y^3$ 的整数解.

5.(4分) $d = 10$, 写出 $\mathcal{O}_K^\times$, 计算 h_K .

6.(6分) 证明: $x^2 - 82y^2 = 2$ 有有理数解但无整数解.

7.(5分) 证明: 任意给定正整数 n , 都存在无穷多个不同的 d , 使得 $h_K \geq n$.

二. (15分) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $L = KF$.

1.(2分) 证明: p 在 L 分歧当且仅当 $p = 2, 3$.

2.(6分) $p > 3$, 写出 p 在 L 中所有可能的分解形式 (e, f, g) ; 进一步, 写出每种分解形式对应的最小素数 p .

3.(4分) 计算 Δ_K, h_K ; 写出 $\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K^\times$.

4.(3分) 证明: $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 5$ 有无穷多整数解.

三. (25分) $K = \mathbb{Q}(\zeta_{20})$, K^+ 是其极大实子域.

1.(3分) 写出 K 的所有子域.

2.(2分) 写出 $2, 5$ 在 K 中的分解形式 (e, f, g) .

3.(6分) $p \neq 2, 5$, 写出 p 在 K 中所有可能的分解形式 (e, f, g) ; 进一步, 写出每种分解形式对应的最小素数 p .

4.(6分) 计算 $\Delta_K, \Delta_{K^+}, h_{K^+}$.

5.(2分) $E \neq K^+$ 是 K 的四次子域且 $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ 是循环群. 写出 $\mathcal{O}_E^\times$.

6.(6分) F 是 K 的真子域且 $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ 不是循环群. 写出 $\mathcal{O}_F$; 计算 Δ_F, h_F .