期中考试简答题

题目部分

注意：论证需详细，按步骤给分。约定：子环总包含单位元；Abel 群等同于 $\mathbb{Z}$-模。

一、（50 分）

考虑自由 Abel 群 $F = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$。设 K 为 F 中由向量 $(6, 2, 8)$、$(10, 2, 12)$ 以及 $(8, 0, 8)$ 生成的子群。

(1) 计算商群 F/K 的秩，以及其扭子群的阶。

(2) 给出群 K 的一组基，并给出必要论证。

(3) 判断并论证：是否存在子群 $U \subseteq F$，使得有内直和分解 $F = K \oplus U$？

(4) 考虑 F/K 的自同态环 $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(F/K)$。试证明：$R$ 为非交换的双边 Noether 环，但非 Artin 环。

(5) F/K 自然成为左 $R = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(F/K)$-模：$f \cdot v = f(v)$。判断并论证：此 R-模是否为单模？是否为不可分解模？

二、（40 分）

复数 Laurent 多项式是指形如 $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i x^i$ 的表达式，其中仅有有限个系数 a_i 非零，指数可以为负数；约定 $x^0 = 1$。它们自然形成 Laurent 多项式代数 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$。

(1) 证明：$\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 为 PID；并给出其所有极大理想。

(2) 计算 Jacobson 根 $\operatorname{rad}\mathbb{C}[x, x^{-1}]$，给出详细论证。

(3) 考虑 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$-模

$$N = \mathbb{C}[x, x^{-1}]/(x^2 - x - 1 + x^{-1}).$$

试将 N 分解为不可分解模的直和，并判断 N 是否为半单模。给出必要论证。

(4) 证明：$\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 同构于商代数 $\mathbb{C}\langle x, y\rangle/(xy - 1,\, yx - 1)$。

三、（10 分）

考虑多项式 $\mathbb{C}[t]$ 的复线性空间。

(1) 证明：$\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[t])$ 为非 Noether 的复代数。

(2) 证明：商代数 $\mathbb{C}\langle x, y\rangle/(yx - 1)$ 一定为非交换代数。判断并论证：它是否为左或右 Noether 代数？