第 12 章 2025 春近世代数期中 (叶班)

✍ **练习 12.1(20 分)** 令 A 为非空集合,M 为 A 到自身的所有映射全体. 试证明:

1. M 在映射的复合下构成一个含幺半群.
2. $f \in M$ 有左逆当且仅当 f 为单射.
3. $g \in M$ 有右逆当且仅当 g 为满射.
4. 若 A 有限, 则 $f \in M$ 可逆当且仅当 f 有左逆, 当且仅当 f 有右逆. 若 A 无限, 该结论是否成立?

✍ **练习 12.2(30 分)**

1. 试写出 S_5 中所有元素的型 (type) 以及每个型中含有的元素数.
2. 试计算 5-cycle (12345) 在 S_5 中的中心化子.
3. 问是否存在 A_5 中的两个元素, 使其在 S_5 中共轭但不在 A_5 中共轭?
4. 证明 (12) 和 (12345) 构成 S_5 的一组生成元.
5. 写出 S_5 的一个 Sylow 2-子群, 并计算 S_5 的 Sylow 2-子群的个数.

✍ **练习 12.3(15 分)** 设 G 为 p 群. 试证明:

1. 方程 $x^p = 1$ 在 G 中的解的数目为 p 的倍数.
2. G 有非平凡中心.
3. G 的任意真子群 H 真包含于 H 在 G 中的正规化子.

✍ **练习 12.4(15 分)**

1. 试判断有理数加法群是否为自由 Abel 群, 并说明理由.
2. 证明:$\mathbb{Q}$ 的任意有限生成子群同构于 $\mathbb{Z}$.
3. 计算 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.

✍ **练习 12.5(15 分)** 设 G 为有限非交换群.

1. 令 $N = |\{(x, y) \in G \times G\colon xy = yx\}|$,$c(G)$ 为 G 中元素的共轭类的个数. 证明:$N = c(G) \cdot |G|$.
2. 证明:$[G\colon Z(G)] \geqslant 4$.
3. 证明:$c(G) \leqslant \frac{5}{8}|G|$, 并举例说明等号可以取到.

✍ **练习 12.6(15 分)**

1. 求自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.
2. 写出所有互不同构的 20 阶群.