2025 年春季学期近世代数期中考试

$\mathbb{Z}_n$ 总是表示整数模 n 加法群.

一、(5 分) 设 $g \in G$, g 的阶为 n. 如果 $g^m = 1$, 求证有 $n \mid m$.

二、(5 分) 设 $A \leqslant G$. 如果 $[G:A] = 2$, 求证有 $A \lhd G$.

三、(10 分)（不需要写计算过程）

(1) 写出 200 阶阿贝尔群所有可能的不变因子与初等因子.

(2) 写出 $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{25}$ 的初等因子与不变因子.

四、(8 分) 证明 2025 阶群不是单群.

五、(8 分) 设 G 为有限群, $H \leqslant G$, $K \leqslant G$. 证明 $|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|$.

六、(10 分) 设 n 为奇数. $D_n = \langle a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, (ba)^2 = 1 \rangle$. 证明 $D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}_2$.

七、(10 分) 证明 S_5 没有 30 阶子群.

八、(16 分)

(1) 设 $N \lhd G$. 如果 N 是有限生成群, G/N 是有限生成群, 则 G 也是有限生成群.

(2) 设 G 为有限生成阿贝尔群, $A \leqslant G$. 证明 $A_t \leqslant G_t$ 与 $A/A_t \leqslant G/G_t$. 这里 A_t 表示 A 的扭子群, G_t 表示 G 的扭子群.

(3) 证明有限生成阿贝尔群的子群仍为有限生成阿贝尔群.

九、(10 分) 设 G 为有限乘法阿贝尔群, 如果 $|G|$ 为奇数, 那么任意 $x \in G$ 都有唯一的平方根, 即存在唯一的 $g \in G$ 使得 $g^2 = x$.

十、(18 分)

(1) 列出 S_5 中元素所有的型.

(2) 设 G 为 60 阶单群. 求 G 的 4 阶子群的个数（需给出证明过程）.