

第 13 章 2025 春近世代数期末 (普班, 统考)

$\mathbb{Z}$ 总表示整数环. 设 p 为素数, $\mathbb{Z}_p$ 表示 p 元域.

练习 13.1 确定环 $\mathbb{R}[x]/((x^3 - 1)^3)$ 的全部素理想和极大理想.

练习 13.2 找到所有环同态 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{20}$.

练习 13.3 设 $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ 两两不同, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. 令 $I_i = (x - t_i)$.

- 验证: $I_i + I_j = \mathbb{R}[x], \forall i \neq j$.
- 计算 $\bigcap_{i=1}^n I_i$.
- 求证: 存在多项式 $f(x)$, 满足 $\deg f \leq n - 1, f(t_i) = a_i, \forall 1 \leq i \leq n$.

练习 13.4 计算 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 的所有单位 (unit). 判断在这个环中, 2 是否可约, 是否是素元.

练习 13.5 记 $\xi_5 = \exp \frac{2\pi i}{5}$. 设 $K = \mathbb{Q}(\lambda + \lambda^{-1}), L = \mathbb{Q}(\lambda)$.

- 计算 $[L: \mathbb{Q}]$, 计算 λ 在 $\mathbb{Q}$ 上的极小多项式.
- 计算 $L: K$, 计算 λ 在 K 上的极小多项式.

练习 13.6

- 计算 $x^8 - 1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的所有不可约因子.
- 计算 $x^8 - 1$ 在 $\mathbb{Z}_3[x]$ 中的所有不可约因子.

练习 13.7 证明 $f(x) = x^3 + 9x + 6$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约. 设 u 为 f 的某个根. 计算 $1 + u$ 在 $\mathbb{Q}(u)$ 中的逆. 写成 $\{1, u, u^2\}$ 的线性组合.

练习 13.8 设域 K 上不可约多项式 $f(x)$ 的次数为 $n \geq 1$. 考虑任意非零多项式 $g(x) \in K[x]$. 设 $h(x)$ 为 $f(g(x))$ 的某个不可约因子, 求证 h 的次数一定被 n 整除.

练习 13.9 设 R 为含么交换环. 证明: 如下命题等价.

- R 只有一个极大理想.
- 若 M 为 R 中所有非单位元素构成的集合, 则 M 是一个理想.
- R 中存在极大理想 M , 使得对任意的 $m \in M, 1 + m$ 是单位.

练习 13.10 设 $f(x, y)$ 是域 K 上非零不可约多项式.

- 视 $f(x, y) \in K(y)[x]$. 证明: 在环 $K(y)[x]$ 中, $f(x, y)$ 要么是单位 (unit), 要么仍是不可约的.
- 考虑非零多项式 $g(x, y) \in K[x, y]$, 且设 $g(x, y)$ 不被 $f(x, y)$ 整除. 求证: $f(x, y) = g(x, y) = 0$ 在 K 中至多只有有限多组解.