一、（50分）考虑Gauss整数环$R=\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$和其子环$S=\{m+2n\mathrm{i}\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$。考虑Gauss有理数域$\mathbb{Q}(\mathrm{i})$。

(1) 给出方程$x^2+y^2=1000$的所有正整数解。

(2) 试证明S的分式域同构于$\mathbb{Q}(\mathrm{i})$。

(3) 考虑$z=2+2\mathrm{i}$。判断并论证：z在S中是否不可约？是否素？

(4) 将$2+42\mathrm{i}$在R进行不可约分解；将其在S中进行不可约分解。

(5) 考虑$z=2+2\mathrm{i}$。分别计算商环R/zR和S/zS的阶（大小）。判断并论证：R/zR和S/zS是否环同构？

(6) 分别计算商环$R/3R$和$S/3S$的阶（大小）。判断并论证：$R/3R$和$S/3S$是否环同构？

(7) 试在相伴意义下，分类S的所有不可约元素。

二、（30分）考虑$\mathbb{C}$的子域$E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\mathrm{i})$和$K=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$。令$L$为包含$E$和$K$的最小子域。

(1) 计算$\sqrt{2}+\mathrm{i}$关于$\mathbb{Q}$的最小多项式；

(2) 证明$E/\mathbb{Q}$为x^4+1的分裂域；

(3) 证明$L/\mathbb{Q}$为x^4-2的分裂域；

(4) 证明: $E\cap K=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

(5) 计算维数$\dim_{\mathbb{Q}}E$和$\dim_{\mathbb{Q}}L$，给出论证；

(6) 计算自同构群$\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$和$\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$的阶，给出论证

三、（10分）考虑$L=\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^3+x^2+x+\bar{1})$，令$u=x+(x^4+x^3+x^2+x+\bar{1})\in L$。故，$L$的元素写成$\{\bar{1},u,u^2,u^3\}$的$\mathbb{F}_2$-线性组合。

(1) 试将多项式$x^4+x^3+x^2+x+\bar{1}$在$L[x]$中进行不可约分解；

(2) 请将L的唯一四元子域中的元素具体写出来。

四、(10分) 考虑二元多项式环的商环$A=\mathbb{C}[x,y]/(y^2-(x^3-1))$和$B=\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^3)$，并认为$\mathbb{C}$自然成为$A$和$B$的子环。令$\mathbb{C}(t)$为一元有理函数域。

(1) 证明：不存在这样的环的单同态$\sigma: A\to\mathbb{C}(t)$，使得$\sigma$限制在$\mathbb{C}$上是恒等。

(2) 证明：不存在环同构$\delta: A\to B$，使得δ限制在$\mathbb{C}$上是恒等。