2025年春季学期近世代数(H)期末试题

考试时间：6月27日14:30-16:30

注意：论证需详细充分,强调按**步骤**给分。约定：子环总包含单位元。

一、（25分）令H为S_4中由(13)和(1234)生成的子群，令$\mathrm{Hom}(H,S_3)$为由从H到S_3的全体群同态组成的集合，令$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})=\{A\in M_2(\mathbb{Z})|\det(A)=1\}$。

(1)列出H的所有元素，并计算每个元素的阶。

(2)给出论证，分类（即，不遗漏不重复地罗列）H的所有子群。

(3)回顾两群同态相等，若它们作为映射相等。计算集合$\mathrm{Hom}(H,S_3)$的大小。

(4)列出H的共轭类，给出论证。

(5)判断并论证：是否存在群的单同态$H\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$？

二、（50分）回顾$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$。令$E=\mathbb{Q}(\boldsymbol{i},\sqrt[4]{5})$和$F=\mathbb{Q}(\sin\frac{2\pi}{5})$。

(1)计算$\sin\frac{2\pi}{5}$关于$\mathbb{Q}$的最小多项式。

(2)计算维数$\dim_{\mathbb{Q}}E$和$\dim_{\mathbb{Q}}(F\cap E)$。

(3)判断并论证：$F/\mathbb{Q}$是否为Galois扩张？

(4)考虑$X=\mathrm{Root}_E(x^4-5)=\{a=\sqrt[4]{5},b=\sqrt[4]{5}\boldsymbol{i},c=-\sqrt[4]{5},d=-\sqrt[4]{5}\boldsymbol{i}\}$。则$G=\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$自然作用于$X$，从而诱导群同态$\rho:G\to S(X)$。试计算$\mathrm{Im}(\rho)$。

(5)论证并分类E的全体子域。

三、（10分）将$\mathbb{Z}^3$中元素写成行向量。考虑由$(4,6,0)$与$(0,6,3)$生成的子群H。

(1)在同构意义下，计算商群$\mathbb{Z}^3/H$的torsion子群。

(2)判断并论证：是否存在群同态$f:\mathbb{Z}^3\to\mathbb{Z}^3$使得恰有$\mathrm{Ker}(f)=H$。

四、（15分）考虑群$G=\langle a,b|a^3,b^2,(ab)^3\rangle=F(a,b)/N$。将$G$中相应的元素$aN$和$bN$分别简记为$a$和$b$。设$K=\{1_G,b,aba^{-1},baba^{-1}\}\subset G$。

(1)证明：在G中，b和aba^{-1}交换。

(2)证明：K为G的正规子群，且商群G/K的阶不超过3。

(3)判断并论证：抽象群G和交错群A_4是否同构？