高等概率论 2025 秋期中考试回忆版

每题 20 分，超过 100 按照 100 计算

1. 对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，代数 $\mathcal{A}$，满足 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$。证明：对 $\forall B \in \mathcal{F}$，$\forall \varepsilon \geqslant 0$，$\exists A \in \mathcal{A}$，使得 $\mathbb{P}(A \triangle B) \leqslant \varepsilon$.（第一章作业题）

2. 对于 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$，以及非负随机变量 X，证明

$$\mathbb{E}[X^p] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1} \mathbb{P}(X \geqslant n) < \infty$$

3. 证明条件期望下的琴生不等式 (第三章作业题)

4. 在某个概率空间上，若 (X, Z) 与 (Y, W) 独立且有相同的联合分布（都是实值随机变量），f 可测且 $f(X)$ 可积，证明 $\mathbb{E}[f(X)|Z]$ 与 $\mathbb{E}[f(Y)|W]$ 同分布，进一步证明如果 $Z = W$, $a.s.$，那么 $\mathbb{E}[f(X)|Z] = \mathbb{E}[f(Y)|Z]$ $a.s.$

5. 证明如果一个分布函数 F 诱导的测度 μ_F 与勒贝格测度 m 相互奇异，那么 $F' = 0$, $m - a.e.$

提示：$\int_a^b f' \leqslant f(b) - f(a)$

（Lebesgue 分解的证明过程，不能直接使用 Lebesgue 分解定理）

6. 证明条件期望的 L^2 最佳逼近性