2025FI 高等概率论 期末考试

杨赛赛

说明： 满分120分，其中1、2、4、5题20分，3题15分，6题25分。超出100分的成绩按100分计算。

1. 设 $\{X_n\}$ 是一个一致可积的随机变量序列。记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$。证明：序列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 一致可积。
2. 设 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 是两个随机变量序列。请证明：
   i. 若 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 都是胎紧的，则序列 $\{X_n + Y_n\}$ 也是胎紧的；
   ii. 若 $X_n \xrightarrow{w} X$，$Y_n \xrightarrow{w} Y$，且对于任意 n，X_n 与 Y_n 相互独立，X 与 Y 相互独立，则 $X_n + Y_n \xrightarrow{w} X + Y$。
3. 设 μ 是实数轴 $\mathbb{R}$ 上的一个概率测度，且满足 $\mu([-1,1]) > 0$。定义测度序列 μ_n 为：

$$\mu_n(A) = \frac{\mu(A \cap [-n,n])}{\mu([-n,n])}$$

   请证明：对于任意有界连续函数 $f \in C_b(\mathbb{R})$，都有：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$$

4. 设 μ_n 是 $\mathbb{R}$ 上的概率测度序列，μ 是 $\mathbb{R}$ 上的有限测度。记 F_n为 μ_n的分布函数，且 $F(x) = \mu((-\infty, x])$。假设对于 F 的任意连续点 x，都有 $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$。请证明：对于 $f \in C_0(\mathbb{R})$，都有：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$$

5. 设 $\{\varphi_n(t)\}_{n\geq 1}$ 是一列特征函数，$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是一个非负数列，且满足 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$。请证明：函数 $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ 也是一个特征函数。
6. 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布（i.i.d.）的随机变量序列，X_1 可积且 $E[X_1] = 0$。假设对于任意 $a > 0$ 都有 $E[e^{aX_1}] = \infty$。请证明：
   i. 对于任意 $a > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(X_1 \geq na) = 0$$

   ii. 利用 (1) 的结论或其它方法证明，对于任意 $a > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = 0$$