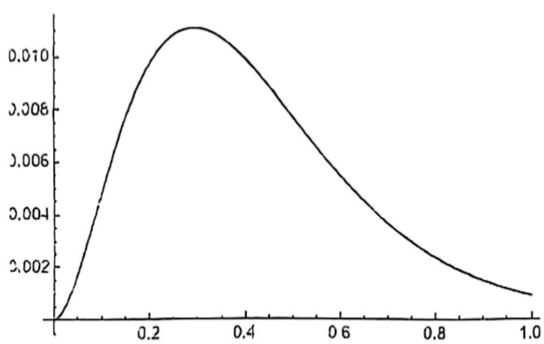
中国科学技术大学2025年新生入学考试
数学试卷解答(非官方)

章俊彦*

2025年8月30日　15:00–17:00

一、填空题（每题5分，共40分）

1、函数$f(x) = x^a e^{-bx}$, $0 < x < 1$图像如下，$a, b \in \{1, 2, \cdots, 9\}$, 则$a = \underline{\quad 2 \quad}$.



解. 求导得$f'(x) = x^{a-1}e^{-bx}(a - bx)$. 故有唯一临界点$x_0 = \frac{a}{b}$. 代入函数得到极值为$f(x_0) = (\frac{a}{be})^a$. 图像表明临界点$x_0$应该在0.3附近(可能略小一点), 所以$3a < b$, a至多只可能是1和2. 又因为$e \approx 2.71828...$, 所以a/be大约为0.1出头一点点，结合函数的极值约为0.011知，$\underline{a = 2, b = 7}$符合题意。 □

2、设$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \pi^{1/e}, x_3 = e^{1/\pi}, x_4 = e^{1/e}$，则$x_1, x_2, x_3, x_4$从小到大排序为$\underline{\quad x_3 < x_1 < x_4 < x_2 \quad}$.

解. 由于$\pi > 3 > e$, 所以$x_3 < x_4 < x_2$是恒成立，所以只要看$x_1 = \sqrt{2}$在什么位置。先证明$\sqrt{2} > e^{1/\pi}$. 取对数后只要证明$\frac{1}{2}\ln 2 > 1/\pi$, 左边大约是0.3465, 右边$1/\pi < 1/3 = 0.333...$ 然后再证明$\sqrt{2} < e^{1/e}$, 取对数后只要证明$\frac{1}{2}\ln 2 < \frac{1}{e}\ln e$, 而这可以通过考察$f(x) = \frac{\ln x}{x}$极值点看出来，可以证明$x = e$是$f(x)$的唯一极大值点。所以这就证明了$x_3 < x_1 < x_4 < x_2$. □

*中国科学技术大学数学科学学院，邮箱: yx3x@ustc.edu.cn.

3、若方程$2\sin x = x + c$在区间$(0, 2\pi)$内有唯一解，则实数c的取值范围为$\underline{-2\pi \le c \le 0 \text{ 或 } c = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\text{或}c = -\sqrt{3} - \frac{5\pi}{3}}$.

解. 在**开区间**$(0, 2\pi)$作$y = 2\sin x$的图像。要使得直线$y = x + c$与$y = 2\sin x$的图像在$(0, 2\pi)$内有且仅有一个交点，则只有两种情况：（1）该直线是正弦函数图像的切线，（2）该直线只“穿越”一次正弦函数图像。对情况（1），就要求正弦函数导数为1，解得$x = \pi/3,\ 5\pi/3,$ 对应$y = \sqrt{3}, -\sqrt{3},$ 于是$c = y - x$就对应答案里面两个离散取值。对情况（2），临界情况就是直线恰好穿过原点或者$x = 2\pi, y = 0$这一点，所以得到$-2\pi \le c \le 0$. □

4、设复数z满足$|z| = |z + 1 - i|$, 则$z^2 = x + yi$的轨迹方程为$\underline{y = \frac{x^2-1}{2}}$.

解. 由题意得z的轨迹为原点和复平面上$(-1, 1)$这一点连线的中垂线，这就得到z的参数方程为$z = (-\frac{1}{2} + t) + (\frac{1}{2} + t)i$, 平方后可得$z^2 = -2t + 2(t^2 - \frac{1}{4})i$, 所以$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$. □

5、平面直角坐标系中，椭圆$x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$长轴的方程为$\underline{y = (1 - \sqrt{2})x}$.

解. 从方程得知，椭圆长轴的两个端点关于原点对称，而椭圆方程可以写作$(x+y)^2 + 2y^2 = 4$, 所以利用参数方程不妨设长轴两端点为$(2\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$和$(-2\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta, -\sqrt{2}\sin\theta)$. 他们之间距离的平方为$d^2 = 4 - 2\sqrt{2}\sin 2\theta$. 欲使距离达到最大，我们需要让$\sin 2\theta = -1$, 即$\theta = -\frac{\pi}{4}$. 这样的话得到长轴两端点为$(\pm(\sqrt{2} + 1), \mp 1)$, 于是长轴所在直线的方程为$y = (1 - \sqrt{2})x$. □

6、设n是正整数，化简$\sum\limits_{k=1}^{n} k^5 = \underline{\frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2)}$. (可进一步因式分解)

解. 设和式为$S_n = c_0 + c_1 n + \cdots + c_6 n^6$. 于是我们有

$$n^5 = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{6} c_k(n^k - (n-1)^k), \qquad c_0 = 0.$$

依次比较$n^5, n^4, \cdots, n$的系数得到$c_6 = \frac{1}{6}, c_5 = \frac{1}{2}, c_4 = \frac{5}{12}, c_3 = 0, c_2 = -\frac{1}{2}, c_1 = 0$. □

7、设无顶盖的长方体盒子（共5个面）的表面积是1，则其容积最大值为$\underline{\frac{\sqrt{3}}{18}}$.

解. 设长方体的长、宽、高为$a, b, h > 0$, 由题意得$ab + 2bh + 2ha = 1$. 取$c = 2h$, 得到$ab + bc + ca = 1$. 由均值不等式得

$$1 = ab + bc + ca \ge 3(a^2b^2c^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow abc \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow V = \frac{1}{2}abc \le \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

□

8、数列$F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 3)$. 前2025项中有<u>168</u>项被9整除。

解. 列举法可得Fibonacci数列模9的余数构成周期为24的数列，且第12、24项模9余0，具体为：1、1、2、3、5、8、4、3、7、1、8、0、8、8、7、6、4、1、5、6、2、8、1、0. □

二、解答题（每题15分，共60分）

9、给定ΔABC, 设三边长为a, b, c. 动点D, E, F分别在线段BC, CA, AB上，求$p := |DE| + |EF| + |FD|$的最小值(用a, b, c表示).

证明. **本题证明：锐角三角形的内接三角形周长最小值在垂足三角形的情况达到，直角、钝角三角形对应的p无法达到其下确界。**

锐角三角形的情况。作D关于AB, AC的轴对称点D_1, D_2, 进而$|AD_1| = |AD_2|$, $|D_1F| = |DF|$, $|D_2E| = |DE|$. 可见折线D_1FED_2的长度是题设中的p, 而三角形ABC是固定的，一旦D给定，那么线段D_1D_2的长度就唯一确定。这说明p达到最小时，折线D_1FED_2应当就是线段D_1D_2.

由于$|AD| = |AD_1| = |AD_2|$和$\angle D_1AD_2 = 2\angle A$, 据余弦定理, $|D_1D_2|^2 = 2|AD|^2(1-\cos 2A)$. 由于$\angle A$是给定的，所以要让上式最小，就只能让$|AD|$最小，这样的话就要求$AD \perp BC$, 进而可算得$BE \perp AC$, $CF \perp AB$ (这里E, F是D_1D_2与CA, AB的交点，可以利用角平分线性质证明垂直关系)。

接下来计算这个最小值的表达式。直接计算可得$|CE| = a\cos C$, 而$\angle ECF = 90° - A$, $\angle EFC = 90° - C$. 据正弦定理可以算得$|EF| = a\cos A$, 进而同理得到$p = a\cos A + b\cos B + c\cos C$, 代入余弦定理

$$p = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}{2abc} = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

非锐角三角形的情况，可证明p的下确界为最长边的高的2倍，但不存在内接三角形达到这个值。

不妨设A为钝角，仍按上述方法作对称点D_1, D_2. 设E, F分别为线段CA, AB上的任意动点，EF交AD于M. 则有$|D_2E| + |EM| \geq |D_2M|$, $|D_1F| + |FM| \geq |D_1M|$. 两个不等式相加，并利用$|EM| + |FM| = |EF|$得到$|D_2E| + |EF| + |FD_1| \geq |D_1M| + |D_2M|$. 而$|D_1M| + |D_2M| > |D_1A| + |D_2A| = 2|AD|$, 等号成立只能是$M = A$的时候，此时$E, F$也移动到$A$处，不构成三角形。 □

10、过空间四面体$ABCD$顶点分别作垂线$\ell_A \perp$ 平面BCD, $\ell_B \perp$ 平面ACD, $\ell_C \perp$ 平面ABD, $\ell_D \perp$ 平面ABC. 证明：若$AB \perp CD$, $AC \perp BD$, 则直线$\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$交于一点。

证明. **第一步：证明$AD \perp BC$.** 设A在平面BCD上的射影为H_1. 由于$AB \perp CD$, 据三垂线定理的逆定理知道$BH_1 \perp CD$, 设垂足为B_1. 由于$AC \perp BD$, 再由三垂线定理的逆定理得知$CH_1 \perp BD$, 这说明H_1是三角形BCD的垂心，进而$DH_1 \perp BC$，据三垂线定理得知$AD \perp BC$.

第二步：找出所求的交点H, 先证明BH所在直线就是ℓ_B. 在三角形ABB_1内，过B作AB_1的垂线，垂足记作H_2, 并记BH_2交AH_1于点H. 现在有$BH \perp AB_1$. 另一方面，因为H在平面BCD内的射影为H_1, $BH_1 \perp CD$, 所以据三垂线定理的逆定理得知$BH \perp CD$. 因为AB_1, CD不平行，所以$BH \perp$平面ACD, 这说明BH所在直线就是ℓ_B.

第三步：证明CH所在直线就是ℓ_C. 同样由三垂线定理的逆定理知道$CH \perp BD$. 接下来只要证明$CH \perp AD$即可。为此，我们计算内积$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AD}$. 由于$AD \perp BC$, 所以$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$; 又因为$BH \perp$平面$ACD$, 所以$\vec{BH} \cdot \vec{AD} = 0$, 这就证明了$CH \perp AD$, 进而$CH \perp$平面$ABD$.

同理，可以证明$DH \perp$平面ABC. 这就说明$\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$四线共点于$H$. □

11、设$A = \sum_{i=1}^{2025} a_i$, $B = \sum_{i=1}^{2025} b_i$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$. 证明: $\sum_{i=1}^{2025} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \geq \sqrt{A^2 + B^2}$. 并给出等号成立的充要条件。

证明. 设向量$\vec{v}_i = (a_i, b_i)$, 则不等式变为$|\vec{v}_1| + \cdots + |\vec{v}_{2025}| \geq |\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_{2025}|$. 两边平方，则只要证明

$$\sum_{i=1}^{2025} |\vec{v}_i|^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq 2025} |\vec{v}_i||\vec{v}_j| \geq \left|\sum_{i=1}^{2025} \vec{v}_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{2025} |\vec{v}_i|^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq 2025} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j.$$

而由$|\vec{v}_i||\vec{v}_j| \geq \vec{v}_i\cdot\vec{v}_j$知不等式显然成立。等号成立当且仅当所有$\vec{v}_i$共线且同向，即$a_1/b_1 = \cdots = a_{2025}/b_{2025}$. (不妨设全体$b_i \neq 0$, 否则颠倒分子分母或者达不到等号.) □

12、设随机变量X, Y相互独立且具有相同分布列，问：$X + Y$的分布列是否可能为

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{\min\{k, 14 - k\}}{47}, \qquad k = 2, 3, \cdots, 12?$$

证明. 我们证明这不可能。首先据X, Y独立同分布知，X可能的取值只有1、2、3、4、5、6，且由对称性知$p_k := \mathbb{P}(X = k)$满足$p_k = p_{7-k}$.

由于$X + Y = 2$只可能是$X = Y = 1$, 所以$p_1^2 = \frac{2}{47}$.

若$X + Y = 3$, 则只可能是$X = 1, Y = 2$或$Y = 1, X = 2$, 这说明$2p_1p_2 = \frac{3}{47}$, 解得$p_2 = \frac{3}{4}p_1$.

若$X+Y=4$, 则只可能是$X=1, Y=3$或$Y=3, X=1$或$X=Y=2$, 这说明$2p_1p_3+p_2^2=\frac{4}{47}=2p_1^2$, 解得$p_3=\frac{23}{32}p_1$.

另一方面$p_1+p_2+p_3=\frac{1}{2}$, 所以$\frac{79}{32}p_1=\frac{1}{2}$, 这和$p_1^2=\frac{2}{47}$矛盾。 □