数理统计 25 期中

一．填空选择题（每空两分）

（1）设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ 为来自同一正态总体的一组简单随机样本，且记 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 及 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ．若统计量 $c_n(X_{n+1} - \bar{X})/S$ 服从 t 分布，则常数 $c_n =$_____ t分布的自由度为______ 且与 $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ 的相关系数为______

答案：$\sqrt{\frac{n}{n+1}}$; $n-1$; 0

（2）设统计量 $\hat{\theta}$ 为总体参数 θ 的一个点估计，下列说法一般不成立的是_____

（A）若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的矩估计，则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的矩估计

（B）若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计，则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的最大似然估计

（C）若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计，则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的无偏估计

（D）若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计，则 $\hat{\theta}^2$ 为 θ^2 的相合估计

答案：C

（3）如果极小充分统计量存在，那么充分完全统计量必是极小充分统计量，但是极小充分统计量不一定是完全的．这种说法_____

（A）正确

（B）错误

答案：A

（4）设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自于正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本，若要求参数 μ 的置信系数为 95% 的置信区间长度不超过 1 ，则至少需要抽取的样本量 n 为______

（A） 14

（B） 16

（C） 18

（D） 20

答案：B

（5）在给定一组样本值和先验下，采用后验期望作为感兴趣参数 θ 的估计，得到估计值 $\hat{\theta} = 5$ ．下述说法正确的是______

（A）在重复抽取样本意义下 θ 的无偏估计值为 1.5

（B）$\hat{\theta} = 1.5$ 是 θ 的有效估计

（C）估计值 1.5 是最小后验均方误差估计

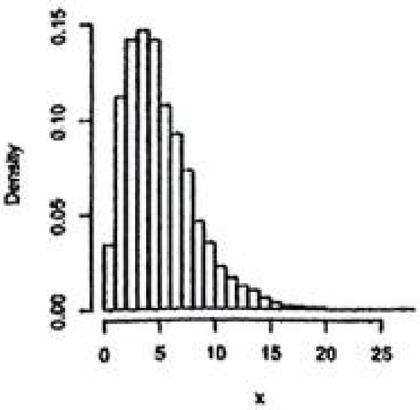
（D）估计值 1.5 是 θ 的相合估计

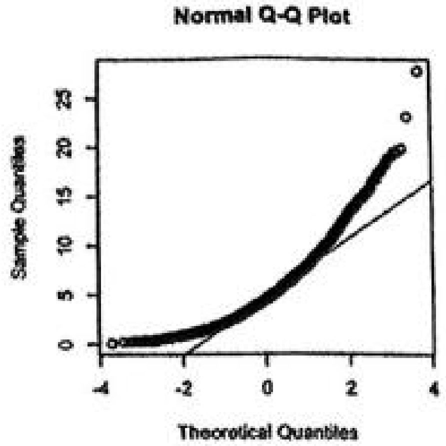
答案：C

二．（16 分）随机调查了某保险公司 n 个独立的车险索赔额 $X_1, \ldots, X_n$（单位：千元），得到如下样本直方图和正态 Q－Q 图．据此回答

（1）该样本来自的总体分布有何特点？可以选择什么分布作为总体分布？给出理由．

（2）试选择合适的参数统计模型，并讨论参数的充分完全统计量．





三．（20 分）设 $X_1,\dots,X_n$ 为来自均匀总体 $U(\theta,\theta+1)$ 的简单样本，其中 $\theta\in R$ 为未知参数．试

（1）证明 $T=\left(X_{(1)},X_{(n)}\right)$ 为 θ 的极小充分统计量但不是完全统计量．

（2）求 θ 的最大似然估计，并讨论其相合性．

四．（25 分）某厂生产的产品分为三个质量等级 $(X=1,2,3)$ ，各等级产品的分布如下

X	1	2	3
P	θ	2θ	$1-3\theta$

其中 $\theta\in(0,1/3)$ 未知．为了解该厂产品的质量分布情况，从该厂产品中随机有放回抽取 20 件产品检测后发现一等品有 5 件，二等品有 7 件，三等品有 8 件．试
（1）求 θ 的矩估计和最大似然估计量，是否都为无偏估计？给出估计值．
（2）求 θ 的最小方差无偏估计量，其方差是否达到了 Cramér－Rao 下界？

五．（25 分）调查发现人们每天使用手机的时间（单位：分钟）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ ，其中 $\mu\in R,\sigma^2>0$ 为未知参数．现随机调查了 25 个人每天使用手机时间，得到样本均值 $\bar{x}=180$ 分钟，样本标准差 $s=20$ 分钟．若取先验分布为 $\pi(\mu,\sigma^2)\propto\sigma^{-2}$ ．试
（1）求 σ^2 的边际后验分布，并给出 σ^2 的后验期望估计值．
（2）求一个人每天平均使用手机时长 μ 的 95% 置信区间和可信区间，两者的解释有何不同？

附表：上分位数 $u_{0.025}=1.960, u_{0.05}=1.645,\ t_{24}(0.025)=2.06,\ t_{24}(0.05)=1.71$

伽马分布，逆伽马分布与 t 分布概率密度函数：

$$Ga(\alpha,\beta): f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \alpha, \beta, x > 0.$$

$$\text{Inv } Ga(\alpha,\beta): f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}}, \alpha, \beta, x > 0.$$

$$t_n: f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty$$