

中国科学技术大学

2024—2025学年第二学期期中试卷

考试科目：概率论与数理统计

可以使用简单计算器

一、填空题（每小题4分，共40分，答案写在试卷上）

1. 连续抛掷两枚均匀骰子，每颗骰子出现的点数独立，令 $X = \min\{X_1, X_2\}$ ，其中 X_1, X_2 分别表示两颗骰子的点数，则 $P(X = 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 已知 $P(A|B) = 0.6$ ， $P(B) = 0.5$ ， $P(A) = 0.4$ ，则 $P(B|A)$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 设随机向量 (U, V) 的分布函数为 $\Phi(u)\Phi(2v + 1)$ ，其中 Φ 为标准正态分布函数，则 (U, V) 服从二元正态分布 $N(\underline{\hspace{2cm}})$ 。
4. 设 U 的密度函数为 $f(u) = A \exp(u/2) I(u < 0)$ ，则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 设随机变量 U 和 V 相互独立， U 的密度函数为 $f(u) = 2u I(0 < u < 1)$ ，且 V 的概率分布为 $P(V = 0) = P(V = 2) = 0.5$ ，则 $P(U + V < 2.5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 将 n 个球随机地投入 m 个盒子中（即：每球入盒等可能且相互独立），则有球的盒子个数的数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 如果 X_1, \dots, X_n 独立同分布于参数为 $\lambda = 1$ 的泊松分布，它们与随机变量 N 也独立，且 N 服从二项分布 $B(20, 1/2)$ 。记 $Y = \sum_{k=1}^N X_k$ ，则 $EY^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 4)$ ，随机变量 Y 服从参数为 $1/2$ 的指数分布，且 $\text{Cov}(X, Y) = 1/2$ 。记 $Z = X - 2Y$ ，则 X 与 Z 的相关系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 设随机变量 X 服从 $[-1, b]$ 上的均匀分布，若切比雪夫不等式有

$$P(|X - 1| < \varepsilon) \geq \frac{2}{3},$$

则 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\varepsilon = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 假设 $\{X_i\}_{i \geq 1}$ 是独立同分布随机变量序列，且 $E(X_1) = \text{Var}(X_1) = 1$ ，如果

$$Y_n = c \sum_{i=1}^n \frac{X_{2i} - X_{2i-1}}{\sqrt{n}},$$

则当常数 $c = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，由中心极限定理， n 充分大时 Y_n 近似服从标准正态分布。

二、(15分)

一台服务器每天使用一条通信信道与外界通信。该通信信道有三种状态：

- 正常 (S_1): 当天无任何故障, 概率为 $P(S_1) = 0.8$;
- 部分故障 (S_2): 存在部分损伤但仍能通信, 概率为 $P(S_2) = 0.15$;
- 完全故障 (S_3): 当天彻底失效, 概率为 $P(S_3) = 0.05$ 。

每天运行结束后, 通过一套自动诊断程序进行检测, 诊断结果有两类: 1. 测试通过 (T); 2. 测试未通过 (F)。诊断系统的特性为:

$$P(T|S_1) = 0.99, \quad P(F|S_1) = 0.01,$$

$$P(T|S_2) = 0.80, \quad P(F|S_2) = 0.20,$$

$$P(T|S_3) = 0.10, \quad P(F|S_3) = 0.90.$$

1. 求一次检测结果为测试通过的概率 $P(T)$ 。
2. 若检测结果为测试通过, 求当天信道实际上为正常 (S_1) 状态的条件概率。
3. 若两天连续检测均未通过, 求至少有一天的信道为完全故障 (S_3) 状态的条件概率 (假设每天的检测独立, 每天信道的状态也独立)。

三、(15分)

一生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的, 假设每箱平均重 50 千克, 标准差为 5 千克, 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱, 才能保证不超载的概率大于 0.977。 ($\Phi(2) = 0.977$, 其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数)

四、(15分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 24y(1-x), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

1. 分别求 X 和 Y 的边缘密度, 并判断 X 和 Y 是否相互独立。
2. 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $f_{X|Y}(x|y)$ 。

五、(15分)

设随机变量 X, Y 独立同分布于正态分布 $N(0, 1/2)$, 试求:

1. $E(|X - Y|)$ 和 $\text{Var}(|X - Y|)$;
2. $E[\max(X, Y)]$ 和 $E[\min(X, Y)]$ 。

附录 分位数: $u_{0.0167} = 2.13$, $u_{0.025} = 1.960$, $u_{0.05} = 1.645$ 。