中国科学技术大学 2025 春季学期
《概率论》期末试题 2025.5.21

姓名: 学号: 分数:

符号说明: $X_n \xrightarrow{D} X$ 表示依分布收敛, $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 表示几乎处处收敛.

1. (25分) 经典d维热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

以有界连续函数 $f(\mathbf{x})$ 为初始条件 $u(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x})$ 的解可表示为

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad p_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2t}},$$

其中 $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$.

(i) 写出两个涉及到的概率论概念，并明确指出其在上面材料中的具体体现.

(ii) 若 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 为两个 d 维随机向量，联合密度为

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = p_s(\mathbf{x}) p_{t-s}(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,$$

这里常量 $t > s > 0$. 求其内积的数学期望 $\mathbb{E}[\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}]$.

(iii) 当维数 $d=1$ 时计算条件期望 $\mathbb{E}[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]$.

2. (15分) 设 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, 记 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) 若矩母函数 $M(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1}]$ 存在, 证明尾概率估计

$$\mathbb{P}(X_1 \ge a) \le \inf_{t>0}\{e^{-at}M(t)\}.$$

(2) 若 $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$, 试证明: 对任意 $a > 0$ 均有

$$\mathbb{P}(S_n \ge a) \le e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

3. (20分) 随机变量 X 与 Y 的全变差距离定义为

$$d_{TV}(X,Y) = \sup_{h:\|h\|_\infty \le 1} |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]|,$$

这里上确界对所有满足 $\|h\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)| \le 1$ 的可测函数.

(i) 证明 $d_{TV}(X_n, X) \to 0$ 蕴含 $X_n \xrightarrow{D} X$.

(ii) 取 X_n 为 $\{1/n, 2/n, \ldots, n/n\}$ 上均匀分布, X 为 $(0,1]$ 上均匀分布, 证明此时 $X_n \xrightarrow{D} X$, 但 $d_{TV}(X_n, X) \to 0$ 不成立.

(iii) 当 X, Y 有密度 f, g 时, 证明

$$d_{TV}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} |f-g|\,dx = 2\sup_{B\subset\mathbb{R}} |\mathbb{P}(X\in B) - \mathbb{P}(Y\in B)|.$$

这里上确界对所有 Borel 集.

4. (20分) 非常值的随机变量 X_n 取值 $\{0,1,\ldots,n\}$, 母函数 $G(z) = \mathbb{E}[z^{X_n}]$ 为 n 次多项式且所有零点均为负数, 记

$$X_n^* := \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}}.$$

(i) 若 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = \infty$, 试证明 X_n^* 依分布收敛到标准正态分布.

(ii) 若 $X_n \sim B(n, \lambda/n)$ (二项分布, $n \ge \lambda$, λ 为固定正数), 试求 X_n^* 在依分布收敛意义下的极限.

5. (25分) 假设 $\{X_k\}$ 为独立同分布随机变量列, 所有 $0 < X_k < \infty$, $\mathbb{E}[X_k] = \mu \in (0, +\infty]$. 记 $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (T_n 可看作某事件第 n 次发生的等待时间)、令 $N_t = \sup\{n : T_n \le t\}$ (截止到时刻 t 事件发生的次数). 试证明

(i) 当 $\mu = +\infty$ 时,

$$\frac{1}{n}T_n \xrightarrow{a.s.} +\infty.$$

(ii)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}N_t \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{\mu},$$

这里约定 $1/\infty = 0$.

附注: 第 5 题 (ii) 含有附加 5 分.

扫描全能王 创建