1. (15') 设 f 是一个非常值整函数，证明：$f(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 中稠密.

2. (15') 函数 f, g 在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 中全纯，在 $\overline{\Omega}$ 上连续，

证明：函数 $|f|+|g|$ 在 $\partial\Omega$ 上达到其最大值.

3. (15') f 是一个整函数，满足 $f(z+w)=f(z)+f(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$

证明：$f''(z) \equiv 0$.

4. (10') S 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个函数.

证明：f 可测 $\Longleftrightarrow \forall s \in S$，$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)>s\}$ 是可测集.

5. (15') $f, g, f_n, g_n \in L^1(\mathbb{R})$，$n=1,2,\cdots$ 且 $f_n \to f$，$g_n \to g$ a.e.，

$|f_n(x)| \le g_n(x)$ a.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx,$$

证明：$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

6. (15') 设 ν 为正实半轴 Borel 集上测度，s.t. $\varphi(t) := \nu([0,t))$

对 $\forall t>0$ 均有限. (Ω, Σ, μ) 是一个测度空间，

f 是 Ω 上任意非负可测函数，

那么有 $$\int_\Omega \varphi(f(x))\,d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \mid f(x)>t\})\,d\nu(t)$$

7. (15') 设 $A = \{x=(x_k)_{k=1}^{+\infty} \in \ell^2 \mid |x_k| \le \frac{1}{k}, k=1,2,\cdots\}$

证明：(i) A 是 ℓ^2 中列紧集

(ii) A 不含于 ℓ^2 中任意有限维子空间.

(iii) A 没有内点.