# 《实用随机过程》2025期中考试试题

## 一、(18分)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示一个速率为 $\lambda$ 的 Poisson 过程，而 $S_n$ 为其第 $n$ 个事件的发生时刻，$n \geq 1$。

(1) 对任意 $s > 0$，求 $E[S_2|N(s) = 1]$。

(2) 对任意 $s, t > 0$，求协方差 $Cov(N(s), N(s+t))$。

(3) 对任意整数 $n \geq 1$，在 $N(t) = n$ 的条件下，求 $N(2t/3) - N(t/3)$ 的条件分布律。

## 二、(18分)

设在某区间上，卡车和客车独立地分别以速率 $\lambda_1, \lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 的 Poisson 过程到达且立即通过。

(1) 求这些汽车达到的时间间隔的分布。

(2) 设在 $t_0$ 时刻观察到一辆轿车通过，求下一辆通过的汽车仍为轿车的概率。

(3) 求在连续两辆轿车通过该路口期间非轿车通过数量的期望。

## 三、(12分)

设顾客以 $\lambda = 2$ 人每小时的速度到达某个自动取款机，且每个顾客取走的金额相互独立，期望为 $\mu = 500$ 元，方差为 $\sigma^2 = 6000$。以 $X(t)$ 表示到 $t$ 为止顾客取走的总金额（忽略顾客取钱的时间）。求 $X(5)$ 的期望和标准差。

## 四、(12分)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示一个速率为 $\lambda$ 的 Poisson 过程，而 $X$ 为一独立于该过程的非负随机变量，且 $EX = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$。求 $E[N(X)]$ 和 $Var[N(X)]$。

## 五、(20分)

考虑一组独立可重复的随机试验，设每次只能出现 A, B 和 C 三种结果之一，且发生的概率依次为 0.5, 0.3 和 0.2。对花样 AAA 和 ABCAB，分别求它们首次出现所需平均试验次数。

## 六、(20分)

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为一更新过程，且其达到间隔时间 $X_1, X_2, \ldots$ 均服从均匀分布 $U[1, 3]$。

(1) 求更新函数 $m(t)$ 的表达式，其中 $0 < t < 3$。

(2) 利用关键更新定理求 $\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-(t-s)} dm(s)$。

(3) 设 $Y(t)$ 表示时刻 $t$ 的剩余寿命，求 $\lim_{t\to\infty} \int_0^t Y(s)ds/t$。

(4) 求 $\lim_{t\to\infty} E[Y(t)]$。

## 七、(附加题, 10分)

设 $\{N_D(t), t \geq 0\}$ 为一延迟更新过程，且其达到间隔时间 $X_1$ 和 $X_2$ 分别服从参数为 $\lambda$ 和 $\mu$ 的指数分布。试求更新函数 $m_d(t)$ 的精确表达式。