2025春《实用随机过程》期末考试卷

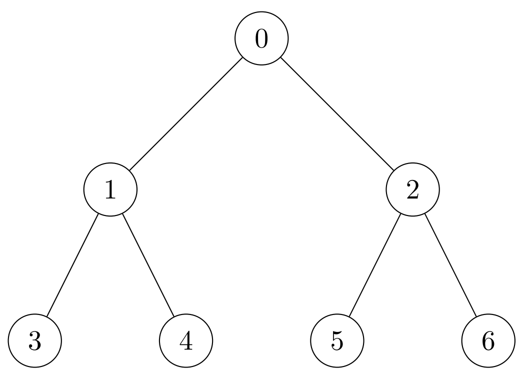
一、(12分) 设离散时间 Markov 链 $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ 的状态空间为 $\{1,2,3,4\}$，且转移概率矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 指出该 Markov 链有几个类，并写出每个类所包含的状态。

(2) 记 $T=\min\{n \geq 0 : X_n = 1 \text{ 或 } 4\}$，试求 $E[T|X_0=2]$。

二、(30分) 设有一个质点在如原所示的二叉树上(共 $m=3$ 层)作随机游走。它从顶点 0 出发，每隔单位时间等概率沿边转移到某个邻点上。以 X_n 表示该质点所在顶点的编号，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为一 Markov 链。



(1) 试写出该Markov链的一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}_3$。

(2) 对任意顶点 i $(0 \leq i \leq 6)$，讨论其周期性和常返性。

(3) 对任意顶点 i $(0 \leq i \leq 6)$，求质点从 i 出发后首次返回 i 所需平均步数 μ_i。

(4) 在稳态条件下，该Markov链是否时间可逆？需说明理由。

(5) 对一般的 m $(m \geq 1)$，试求该Markov链的平稳分布（可不写计算过程）。

三、(16分) 设连续时间 Markov 链 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的状态空间为 $\{1,2,3\}$，且其 Q 矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 求对应嵌入链的转移概率矩阵。

(2) 当 $t \to \infty$ 时，求 $X(t)$ 的极限分布。

四、(10分) 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为一个线性生灭过程，且生长率和死亡率分别为 $\lambda_n = n\lambda$ 和 $\mu_n = n\mu$, $n \geq 0$，其中 $\lambda, \mu > 0$ 为给定常数。如果初始状态 $X(0) = 1$，试求灭绝概率 $q = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = 0|X(0) = 1)$。

五、(14分) 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动。

(1) 试求随机变量 $X = B(1) + B(2) + B(3)$ 的分布。

(2) 在给定 $B(2) = 1$ 的条件下，试求 $B(1)$ 和 $B(3) + B(4)$ 的联合分布。

六、(18分) 考虑一质点在直线上从正整数 a 出发的简单对称随机游走，其中 0 和 $K(K > a)$ 为两个吸收态。设 S_n 表示时刻 n 该质点的位置，$S_0 = a$，而 $T = \min\{n : S_n = 0 \text{ 或 } K\}$，记

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} S_k - \frac{1}{3} S_n^3$$

(1) 证明 $\{M_n, n \geq 0\}$ 为鞅。

(2) 试利用停时定理来求解 $E[\sum_{k=0}^{T} S_k]$。

七、(附加题, 10分) 证明标准 Brown 运动 $\{B(t), t \geq 0\}$ 在任一区间 $[0, t]$ 上的二次变差为 t，即对区间 $[0, t]$ 上的任意分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$，当 $n \to \infty$ 时，若最大间隔 $\max_{0\leq i\leq n}(t_{i+1} - t_i) \to 0$，则有 $Q_n = \sum_{k=0}^{n} [B(t_{k+1}) - B(t_k)]^2$ 依概率收敛到 t。