中国科学技术大学
2024 - 2025学年第二学期期中考试试卷

考试科目： 线性代数（B1） 得分：________

所在院、系：________ 学号：________

装订线 答题时不要超过此线

题号	一	二	三		五	六	总分
得分							
复查							

一、【每小题5分，共30分】填空题：

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. 设α, β, γ为3维列向量. 记矩阵$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta & -\alpha + 2\beta - \gamma & \beta + 2\gamma \end{pmatrix}$.

若$|A| = 3$, 则$|B| =$ ________.

3. 已知B, C是n阶可逆方阵. 则$\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{pmatrix}$.

4. 设V是任一线性空间. 向量ξ在V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的坐标为$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

则ξ在V的另一组基$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1$下的坐标为 $(-4, 3, 3)$.

5. 将向量$\beta = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}$表示成$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$的线性组合

$\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2 + 2\vec{\alpha}_3$.

6. 设$\mathbb{R}_4[x]$为实数域上次数不超过4的多项式全体，按照多项式的加法和数乘运算构成的线性空间. 则集合$V = \{f(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(i) = 0, (i = 1, 2, 3)\}$构成$\mathbb{R}_4[x]$的子空间. 写出$V$的一组基 $(x-1)(x-2)(x-3)$ $x(x-1)(x-2)(x-3)$.

二、【每小题5分（判断正误2分，理由3分），共20分】

判断题：判断下列命题是否正确, 并简要说明理由或举出反例.

1. 对任意 $m\times n$ 矩阵 A, 总存在 $n\times m$ 矩阵 B, 满足 $ABA=A$.

1. 正确. $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$. $(\mathrm{rank}(A)=r)$

取 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ 即可满足

2. 考虑两个 $m\times n$ 矩阵 A 和 B. 若 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价, 则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(B)$.

2. 错误. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=2$.

$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$　　$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=3$.

3. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $2\alpha_1-\alpha_2+8\alpha_3$, $-\alpha_1+5\alpha_2+5\alpha_3$, $3\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3$ 也线性无关.

3. 错误. $-11(2\alpha_1-\alpha_2+8\alpha_3)+5(-\alpha_1+5\alpha_2+5\alpha_3)+9(3\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3)=0$

4. 已知 A 为 4 阶非零实矩阵, 满足 $A^*=A^{\mathrm{T}}$. 则 $|A|=1$.

4. 正确. $A^T=A^*\Rightarrow A^*A=A^TA=\det(A)\cdot I_4$.

三、【7+6=13分】考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & =3 \\ x_1 & +ax_2 & -2x_3 & =2 \\ 2x_1 & +5x_2 & +ax_3 & =5 \end{cases}$.

(1) 问 a 为何值时, 该方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?

(2) 在有解的情况下, 给出方程组的通解.

四、【12分】计算行列式
$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & 1+x_1^4 \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & 1+x_2^4 \\ 1+x_3 & 1+x_3^2 & 1+x_3^3 & 1+x_3^4 \\ 1+x_4 & 1+x_4^2 & 1+x_4^3 & 1+x_4^4 \end{vmatrix}.$$

五、【6+3+8=17分】考虑矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\mathrm{rank}(A)$. 写出 A 的列向量组的一个极大线性无关组.

(2) 记 $V=\{X\in\mathbb{R}^{4\times 4}\mid AX=O\}$. 证明 V 是 $\mathbb{R}^{4\times 4}$ 的一个子空间.

(3) 求 $\dim V$. 写出 V 的一组基.

六、【4+4=8分】考虑 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $n\geqslant 2$.

(1) 证明: 若对每个 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有

$$2|a_{ii}|>\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

则 $\det(A)\neq 0$.

(2) 证明: 若对每个 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有

$$2a_{ii}>\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

则 $\det(A)>0$.

线性代数(B1)期末试卷　参考答案

一、【每小题 5 分】填空题:

1. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. 39

3. $\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

5. $\beta = 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$

6. $(x-1)(x-2)(x-3)$, $x(x-1)(x-2)(x-3)$. (此题答案不唯一)

二、【每小题 5 分(判断正误 2 分，理由 3 分)】判断题

1. 对任意 $m \times n$ 矩阵 A, 总存在 $n \times m$ 矩阵 B, 满足 $ABA = A$.

对. 设 $\text{rank}(A) = r$, 则存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$.

取 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$ 即可.

2. 考虑两个 $m \times n$ 矩阵 A 和 B. 若 A 的列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 与 B 的列向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 等价, 则 $\text{rank}(A) = \text{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{rank}(B)$.

错. 反例: 考虑 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 此时 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 等价, 而 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$, $\text{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 3$.

3. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则向量组 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3$, $-\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3$, $3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 7\alpha_3$ 也线性无关.

错. 记 $\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 8\alpha_3$, $\beta_2 = -\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3$, $\beta_3 = 3\alpha_1 - 4\alpha_2 + 7\alpha_3$.

则 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T$.

由 $|T| = 0$, 可知 $\text{rank}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \text{rank}(T) < 3$, $\therefore$ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关.

4. 已知 A 为 4 阶非零实矩阵, 满足 $A^* = A^{\mathrm{T}}$. 则 $|A| = 1$.

对. (1) 由 $A^* = A^{\mathrm{T}}$ 得 $A^{\mathrm{T}}A = A^*A = |A|I_4$. 等式两边同时求行列式, 得 $|A| = 0$ 或 ± 1.

(2) 观察矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 和 A^*A 的主对角线上的元素, 可知 $|A| \geqslant 0$.

(3) 若 $|A| = 0$, 则 $\text{rank}(A) \leqslant 3$.

当 $\text{rank}(A) < 3$ 时, $A^* = O$, $\therefore$ $A^{\mathrm{T}} = A^* = O$. 这与已知条件 $A \neq O$ 矛盾.

当 $\text{rank}(A) = 3$ 时, $\text{rank}(A^*) = 1$, 而 $\text{rank}(A^{\mathrm{T}}) = 3$, 与已知条件 $A^* = A^{\mathrm{T}}$ 矛盾. $\therefore$ $|A| \neq 0$.

由 (1)(2)(3) 得 $|A| = 1$.

三、【7+6=13分】考虑线性方程组 $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & =3 \\ x_1 & +ax_2 & -2x_3 & =2 \\ 2x_1 & +5x_2 & +ax_3 & =5 \end{cases}$.

(1) 问 a 为何值时, 该方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解?

(2) 在有解的情况下, 给出方程组的通解.

解: 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$. 计算得 $|A| = (a-3)(3-9)$.

情形 1: 当 $a \neq 3$ 且 $a \neq 9$ 时, 方程组有唯一解.

利用 Cramer 法则. 可求得唯一解 $\left(\dfrac{3a-20}{a-9}, \dfrac{1}{9-a}, \dfrac{1}{9-a}\right)^{\mathrm{T}}$.

情形 2: 当 $a = 3$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \therefore \text{方程组有无穷多解.}$$

通解为 $\begin{pmatrix} 5-19t \\ -1+7t \\ t \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbb{F})$.

情形 3: 当 $a = 9$ 时,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 9 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \therefore \text{方程组无解.}$$

四、【12分】计算行列式$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & 1+x_1^4 \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & 1+x_2^4 \\ 1+x_3 & 1+x_3^2 & 1+x_3^3 & 1+x_3^4 \\ 1+x_4 & 1+x_4^2 & 1+x_4^3 & 1+x_4^4 \end{vmatrix}$.

解:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & 1+x_1^4 \\ 0 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & 1+x_2^4 \\ 0 & 1+x_3 & 1+x_3^2 & 1+x_3^3 & 1+x_3^4 \\ 0 & 1+x_4 & 1+x_4^2 & 1+x_4^3 & 1+x_4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ -1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ -1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ -1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 0 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 0 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{vmatrix} = D_1 - D_2$$

对 D_1 和 D_2 分别使用Vander Monde行列式的结论，可得

$$D_1 = 2x_1x_2x_3x_4 \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j - x_i)$$

$$D_2 = (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j - x_i)$$

$$\therefore\ D = [2x_1x_2x_3x_4 - (x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)] \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j - x_i)$$

五、【6+3+8=17分】考虑矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&1&0&7\\-1&0&1&-3\\3&2&1&11\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\mathrm{rank}(A)$. 写出 A 的列向量组的一个极大线性无关组.

(2) 记 $V=\{X\in\mathbb{R}^{4\times4}\mid AX=O\}$. 证明 V 是 $\mathbb{R}^{4\times4}$ 的一个子空间.

(3) 求 $\mathbf{dim}V$. 写出 V 的一组基.

(1) 解: 计算可知 $\mathrm{rank}(A)=2$.

所以任取 A 的两列都是它的列向量组的一个极大线性无关组.

(2) 证明需要说明三点: V 非空; V 对加法运算封闭; V 对数乘运算封闭.

(3) 解:

注意到以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间 V_A 有一组基 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

记 $X=\begin{pmatrix}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3&\gamma_4\end{pmatrix}$. 则 $X\in V\iff\gamma_i\in V_A\iff\gamma_i=t_{i1}\xi_1+t_{i2}\xi_2$

$\therefore\begin{pmatrix}\xi_1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi_2&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\xi_1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\xi_2&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\xi_1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\xi_2&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0&\xi_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&\xi_2\end{pmatrix}$ 是 V 的一组基, $\mathrm{dim}V=8$.

六、【4+4=8分】考虑 n 阶实方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 其中 $n\geqslant 2$.

(1) 证明: 若对每个 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有

$$2|a_{ii}|>\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

则 $\det(A)\neq 0$.

(2) 证明: 若对每个 $1\leqslant i\leqslant n$ 都有

$$2a_{ii}>\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

则 $\det(A)>0$.

(1) 证明:（反证法）假设 $\det(A)=0$. 考虑 A 的列向量分块 $A=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

则 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 线性相关. 从而存在不全为零的 $k_1,\ldots,k_n$, 使得 $k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0$.

不妨设 $|k_1|,\ldots,|k_n|$ 中最大者为 $|k_t|$, 其中 $1\leq t\leq n$. 由不全为零, 有 $|k_t|\neq 0$.

考虑向量等式 $k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n=0$ 中的第 t 个分量, 得到 $\sum_{j=1}^{n}k_ja_{tj}=0$,

从而 $a_{tt}=-\sum_{j\neq t}\frac{k_j}{k_t}a_{tj}$. 于是,

$$|a_{tt}|=|\sum_{j\neq t}\frac{k_j}{k_t}a_{tj}|\leqslant\sum_{j\neq t}|\frac{k_j}{k_t}a_{tj}|\leqslant\sum_{j\neq t}|a_{tj}|.$$

进而, $2|a_{tt}|\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{tj}|$. 与条件矛盾.

因此, $\det(A)\neq 0$ 得证.

(2) 证明: 注意满足第(2)问条件, 则自然满足第(1)问条件. 由第(1)问结论已有 $\det(A)\neq 0$.

（反证法）假设 $\det(A)<0$. 考虑方阵 $A(x)$ 如下定义得到: 将 A 中非对角线元素都乘以 x, 对角线元素不变. 令 $f(x)=\det(A(x))$, 这是关于 x 的多项式. 则 $f(0)=a_{11}\cdots a_{nn}>0$.

而由反证法假设 $f(1)=\det(A)<0$. 从而, 存在 $0<x_0<1$ 使得 $f(x_0)=\det(A(x_0))=0$.

而新的方阵 $A(x_0)$ 也具备题中的条件, 由第(1)问结论应该有对应行列式非零. 矛盾.

因此, $\det(A)>0$ 得证.