第 17 章 2025S 黎曼几何 (研) 期中

✍ **练习 17.1** 写出黎曼流形 (M,g) 上截面曲率的定义.

✍ **练习 17.2**

1. 若黎曼流形 (M,g) 上任意两点间都存在最短测地线, 能否保证该流形完备?
2. 在流形 $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ 上能否存在黎曼度量 g, 使得其截面曲率 $K\geqslant 1$?

✍ **练习 17.3** 考虑 $(\mathbb{R}^2,g_c)$, 其中 $g_c=e^{2f}(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y)$. 这里 $f=f(x,y)$.

1. 计算截面曲率为 $-e^{-2f}\Delta f$.
2. 证明: 曲线 $\gamma(t)=(0,t)$ 是测地线.

✍ **练习 17.4** 设黎曼流形 (M,g) 上有光滑函数 f 满足

$$\mathrm{Ric}+\nabla^2 f=0.$$

记 S 为标量曲率. 证明:$S+|\nabla f|^2=\mathrm{Constant}$.

✍ **练习 17.5** 考虑双曲空间 $(\mathbb{H}^2,g_{\mathbb{H}})$, 这里 $g_{\mathbb{H}}=\frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y)$. 视 $\mathbb{H}^2$ 为 $\mathbb{C}^+$, 考虑变换

$$\varphi\colon z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},\quad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R}).$$

证明:φ 是 $\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2$ 上的等距同构.

✍ **练习 17.6** 设 X 是黎曼流形 (M,g) 上的 Killing 向量场, 即 $\mathcal{L}_X g=0$.

1. 证明:
$$\frac{1}{2}\Delta|X|^2=|\nabla X|^2-\mathrm{Ric}(X,X).$$
2. 若 Ricci 曲率非正:$\mathrm{Ric}\leqslant 0$, 证明:$\nabla X\equiv 0$.

✍ **练习 17.7** 设黎曼流形 (M,g) 上一点 p 处有开邻域 U 及其上的一组标准正交标架 $\{E_i\}_{i=1}^n$ 满足

$$[E_i,E_j]=c_{ij}^k E_k.$$

证明:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}(c_{ij}^k-c_{ik}^j-c_{jk}^i).$$

✍ **练习 17.8** 令 (M,g) 是完备非紧的黎曼流形. 一条正规测地线称作**射线**, 若 $\gamma\colon[0,+\infty)\to M$ 满足 $d(\gamma(a),\gamma(b))=|a-b|$. 证明: 任意的 $p\in M$ 都存在以 p 为起点的射线 $\gamma(t)$.