

2025年秋季学期偏微分方程小测验 (赵立丰老师班)

1. (20分) 用分离变量法求解如下方程，并证明解的唯一性。

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & (x, t) \in (0, \ell) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0 & x \in [0, \ell], \\ u_x(0, t) = A \sin(\omega t), u(l, t) = 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

2. (10分) 设 $u \in C(\bar{B}_R(0))$ 是三维球上的调和函数，证明： $|\nabla u(0)| \leq \frac{3}{R} \max_{\bar{B}_R(0)} u$.