中国科学技术大学
2025年秋季学期偏微分方程课堂测验答案

考试时间：2025年12月18日 16:00–17:20　　课堂号：001122.01

试题 1 (20分). 填空题，不需要写过程

(1) (5分) 设空间维数$d \geqslant 2$, $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$是径向函数，即$u(\boldsymbol{x})$的取值仅依赖$r := |\boldsymbol{x}|$. 若令$v(r) = u(|\boldsymbol{x}|)$, 则$\Delta u(\boldsymbol{x}) =$ $v''(r) + \frac{d-1}{r}v'(r)$ (请用含$v(r), v'(r), v''(r)$的式子表示)。
评分标准：本题5分，其它答案不得分。课堂上两次提到过，本题做不出来要打屁股。

(2) (6分) 考虑传输方程的初值问题

$$x\partial_t u + t\partial_x u = 0\ (t > 0, x \in \mathbb{R}), \qquad u(0,x) = e^{-2x^2}\ (x \in \mathbb{R}).$$

则特征线的方程为 $x^2 = t^2 + C\ (C \in \mathbb{R})$.

方程解的表达式为 $u(t,x) = \begin{cases} e^{-2(x^2-t^2)} & |x| \geqslant t \\ F(x^2-t^2) \text{ 其中} F \in C^1(\mathbb{R}) & |x| < t \end{cases}$.

评分标准：第一空2分，第二空4分，$|x| \geqslant t$和$|x| < t$情况各2分。本题为习题1.1.2改数字。

(3) (5分) 考虑Burgers方程

$$u_t + uu_x = 0\ (t > 0,\ x \in \mathbb{R}), \qquad u(0,x) = 1958 - 2025x\ (x \in \mathbb{R}).$$

则解的爆破时间为$t =$ $\frac{1}{2025}$ ，解在爆破时间之前的表达式为 $u(t,x) = \dfrac{1958 - 2025x}{1 - 2025t}$.
评分标准：第一空2分，第二空3分。本题为1.1节的Burgers方程，其中得到$u = \varphi(x - ut)$.

(4) (4分) 考虑传输方程

$$\partial_t u - 11\partial_x u = 0\ (t > 0, x < 0), \quad u(0,x) = 45x + 14\ (x \leqslant 0), \quad u(t,0) = g(t)\ (t \geqslant 0).$$

其中$g \in C^1([0,\infty))$. 则当$g(0) =$ 14 , $g'(0)=$ 495 时，方程的解$u \in C^1([0,\infty) \times (-\infty, 0])$.
评分标准：每空2分，共4分。本题为1.2节传输方程边值问题中的初值相容性条件的结论。

试题 2 (10分). 用傅立叶变换方法计算如下Laplace方程有界解的表达式，其中$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\; (x \in \mathbb{R},\; y > 0), \qquad u(x,0) = \varphi(x) \;\; (x \in \mathbb{R}).$$

解. 对x变量作傅立叶变换可得到关于y变量的常微分方程

$$-\xi^2 \hat{u}(\xi,y) + \hat{u}_{yy}(\xi,y) = 0,\;\; \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi). \qquad \xi \in \mathbb{R}, y > 0.$$

该常微分方程的通解为

$$\hat{u}(\xi,y) = C_1(\xi)e^{-|\xi|y} + C_2(\xi)e^{|\xi|y}.$$

因为我们要求方程的解有界，所以应该去掉指数增长的部分$e^{|\xi|y}$(否则其傅立叶逆变换的积分不收敛)，因此带入初值得到$\hat{u}(\xi,y) = e^{-|\xi|y}\hat{\varphi}(\xi)\;(y > 0)$.

令$F_y(\xi) := e^{-|\xi|y}$, 计算它的傅立叶逆变换如下：

$$\begin{aligned}\check{F}_y(x) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi - |\xi|y}\, \mathrm{d}\xi \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+y)\xi}\, \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-y)\xi}\, \mathrm{d}\xi \right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ix+y} - \frac{1}{ix-y} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

最后，利用傅立叶变换的性质（卷积↔乘积）可得

$$u(x,y) = (\hat{u}(\cdot,y))^{\vee}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\check{F}_y * \varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-z)^2+y^2}\varphi(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

评分标准：满分10分，本题是习题2.4.2的原题。

- 对x变量作傅立叶变换得到正确的常微分方程，得2分。
- 正确求解$\hat{u}(\xi,y)$常微分方程，得2分。
- 正确计算$F_y(\xi)$的傅立叶逆变换，得4分。
- 计算出u的表达式，得2分。
- 计算$\hat{u}$和$\check{F}_y(\cdot)$时，$|\xi|$漏掉绝对值的，得一半分。
- 傅立叶逆变换中系数$\sqrt{2/\pi}$算错、最后一步乘积变卷积写错系数$1/\sqrt{2\pi}$的，各扣1分。

试题 3 (20分). 考虑一根两端固定的弦发生阻尼振动的方程，阻尼系数$d \in (0,2]$.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + du_t = 0 & t > 0,\ 0 < x < \pi; \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geqslant 0; \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = 0 & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

其中初值$\varphi \in C^3([0,\pi])$满足相容性条件$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$.

(1) (12分) 用分离变量法求出方程解的表达式（用含φ的式子表示）。

(2) (4分) 若$0 < d < 2$，证明：存在仅依赖初值φ的常数$C > 0$，使得(1)中求得的解满足

$$|u(t,x)| \leqslant Ce^{-\frac{d}{2}t},\ \ \forall t > 0, x \in (0,\pi).$$

(3) (4分) 若$d = 2$，是否存在不恒为零且满足相容性条件的$\varphi(x)$，使得对任意固定的$x \in (0,\pi)$有

$$\limsup_{t\to+\infty} e^t |u(t,x)| = +\infty$$

成立？若是，请构造一个满足该式的$\varphi(x)$，否则请证明这个式子不对。

证明. (1) 将具有变量分离形式的解$u(t,x) = T(t)X(x)$代入阻尼波方程，得到

$$T''(t)X(x) - T(t)X''(x) + dT'(t)X(x) = 0 \Rightarrow \frac{T''(t) + dT'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda(\text{常数}).$$

现在求解X满足的常微分方程得到

$$-X''(x) = \lambda X(x)\ \ (0 < x < \pi),\ X(0) = X(\pi) = 0 \Rightarrow \lambda_n = n^2,\ X_n(x) = \sin nx.$$

将该特征值代入T的方程，得到

$$T_n''(t) + dT_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0.$$

其特征方程为$r_n^2 + dr_n + n^2 = 0$.

- 若$0 < d < 2$, 则特征方程的判别式$d^2 - 4n^2 < 4 - 4 \times 1 = 0$. 这说明对任意正整数$n$, 该特征方程只有复根$r_n^{\pm} = \dfrac{-d \pm i\sqrt{4n^2 - d^2}}{2}$. 根据常微分方程理论，我们知道必有

$$T_n(t) = e^{-\frac{d}{2}t}\left[A_n \cos(\Delta_n t) + B_n \sin(\Delta_n t)\right] \qquad \text{其中}\Delta_n := \sqrt{n^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

此时，原方程的解为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{d}{2}t}\left[A_n\cos(\Delta_n t)+B_n\sin(\Delta_n t)\right]\sin(nx).$$

接下来确定系数A_n, B_n. 令$t=0$, 据傅立叶系数的唯一性有

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx)\Rightarrow A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

再看时间导数的初值。据傅立叶系数唯一性，我们有

$$0=T_n'(0)=-\frac{d}{2}A_n+\Delta_nB_n\Rightarrow B_n=\frac{d}{2\Delta_n}A_n=\frac{d}{\pi\sqrt{n^2-\frac{d^2}{4}}}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

- 若$d=2$, 则特征方程在$n=1$时判别式为0，其它情况仍为负。此时$T_1''(t)+2T_1'(t)+T_1(t)=0$的解为

$$T_1(t)=(A_1+B_1t)e^{-t}.$$

而$n\geqslant 2$时仍有

$$T_n(t)=e^{-t}\left[A_n\cos(\Delta_n t)+B_n\sin(\Delta_n t)\right]\qquad \text{其中}\Delta_n:=\sqrt{n^2-1}.$$

因此方程解的表达式为

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=(A_1+B_1t)e^{-t}+\sum_{n=2}^{\infty}e^{-t}\left[A_n\cos(\Delta_n t)+B_n\sin(\Delta_n t)\right].$$

下面利用初值确定系数A_n, B_n $(n\geq 1)$. 同样，据傅立叶系数唯一性，得

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\qquad \forall n\geqslant 1.$$

再看时间导数初值。据傅立叶系数唯一性，我们有

$$n=1,\ 0=T_1'(0)=-A_1+B_1\Rightarrow B_1=A_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

$$\forall n\geqslant 2,\ 0=T_n'(0)=-A_n+\Delta_nB_n\Rightarrow B_n=\frac{1}{\Delta_n}A_n=\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 当$0 < d < 2$时，我们有

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{d}{2}t} A_n \left[\cos(\Delta_n t) + \frac{d}{2\Delta_n}\sin(\Delta_n t)\right]\sin(nx),$$

其中

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \quad \Delta_n = \sqrt{n^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

因为$\varphi \in C^3([0,\pi])$, 所以据傅立叶系数衰减性知$A_n = O(n^{-3})$(实际上根据Riemann-Lebesgue引理应该是$o(n^{-3})$), 这表明方程解的表达式中的级数一致收敛且绝对收敛，并且$\sum\limits_n |A_n| < \infty$. 因此我们得到衰减估计

$$|u(t,x)| \leqslant e^{-\frac{d}{2}t}\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|\left(1 + \frac{d}{\sqrt{4n^2 - d^2}}\right) \leqslant Ce^{-\frac{d}{2}t}.$$

(3) 当$d = 2$时，我们只需要让$n \geqslant 2$的$O(e^{-t})$部分消失即可。例如，取$\varphi(x) = \sin x$, 则由三角函数在$L^2([0,\pi])$中的正交性知，全体A_n, B_n $(n \geqslant 2)$皆为零，而$A_1 = B_1 = 1$, 此时方程的解为$u(t,x) = (1+t)e^{-t}\sin x$，而它显然满足$\limsup\limits_{t\to+\infty} e^t|u(t,x)| = +\infty$. □

评分标准：满分20分，本题改编自习题3.1.2。

- 第(1)问满分12分，其中
  - 分离变量时(4分)，得到(1)解答的第二行得1分；正确求解$X(x)$的常微分方程，得2分；正确写出$T_n(t)$的常微分方程，得1分。
  - $0 < d < 2$时(5分)，正确计算$T_n(t)$得2分，得到$u(t,x)$的表达式得1分。确定A_n, B_n各1分。
  - $d = 2$时(3分)，正确求得$T_1(t)$得2分，得到$u(t,x)$的表达式得1分。
- 第(2)问满分4分，其中必须说明$\sum\limits_n |A_n| < \infty$ (3分), 不等式放缩1分。解的表达式中的级数一致收敛性等可不说明（上课证过）。
- 第(3)问满分4分，答案不唯一。但是A_1, B_1必须不能为零（2分）；且所构造的初值必须满足相容性条件（2分），即$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$.