25 秋 ODE 习题参考答案

宁吴庆班

2025 年 10 月 18 日

1 期中测验

1.1 第一题

求解 $xy' + y = xy^2 lnx$

通过方程可知 $x > 0$(否则 lnx 没意义)，因此方程两边除以 x，得到

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x,$$

这是标准的 Bernouli 方程，且 $n = 2$，设 $u = y^{-1}$。

除去特解 $y \equiv 0$, 代入 u，计算可得

$$u' - \frac{u}{x} = -\ln x,$$

转化为一阶线性方程，积分因子为 $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1}$, 两边乘上 $\mu(x)$, 得到

$$\frac{d}{dx}(\frac{u}{x}) = -\frac{\ln x}{x},$$

两边积分得到

$$\frac{u}{x} = -\int \frac{\ln x}{x}dx + C = -\frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

最终得到

$$u = x(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2)$$

, 代入 y，化简得到

$$y = \frac{1}{x(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2)}$$

最终结果为特解 $y \equiv 0$ 与 $y = \frac{1}{x(C-\frac{1}{2}(\ln x)^2)}$

1.2 第二题

求解 $xy'^2 - 2yy' + x + 2y = 0$

如果 $x \equiv 0$，那么 $y \equiv C$，故 (x, y) 不形成解，所以下设 $x \neq 0$。取 $y = vx$, 则有

$$y' = v + xv',$$

代入原方程化简得到

$$x^3 v'^2 - xv^2 + x + 2vx = 0,$$

除以 x 得到

$$x^2 v'^2 = v^2 - 2v - 1.$$

对于特解，取 $v' = 0, v^2 - 2v - 1 = 0$，得到 $v = 1 \pm \sqrt{2}$, 由此得到特解 $y = (1 \pm \sqrt{2})x$.

对于正常情况，取根号得到 $v' = \pm\frac{\sqrt{v^2-2v-1}}{x}$, 得到方程

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2 - 2v - 1}} = \pm\frac{dx}{x},$$

应用公式 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + c$, 取 $u = v - 1, a = \sqrt{2}$ 得到积分结果

$$\ln|(v-1) + \sqrt{(v-1)^2 - 2}| = \pm\ln|x| + C,$$

回代 $v = \frac{y}{x}$ 得到

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{y}{x} - 1\right)^2 - 2} = C_1 x^{\pm 1} (C_1 \neq 0),$$

等式两边乘 x 得到

$$(y-x) + \sqrt{(y-x)^2 - 2x^2} = C_1, (y-x) + \sqrt{(y-x)^2 - 2x^2} = C_2 x^2 (C_1, C_2 \neq 0).$$

方法 2：

可设 $p = \frac{dy}{dx}$ 不恒为 0，方程可以转化为

$$xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$$

, 整理后得到

$$x = \frac{2y(p-1)}{p^2+1},$$

两边对 y 求导可得,

$$2y\frac{-p^2+2p+1}{(p^2+1)^2}\frac{dp}{dy}=\frac{1}{p}-\frac{2p-2}{p^2+1}.$$

再次化简：若 $-p^2+2p+1=0$，有奇解 $y=(1\pm\sqrt{2})x+D$，验证得到 $D=0$。否则，两边除以 $-p^2+2p+1$ 化简得到

$$\frac{dp}{dy}=\frac{p^2+1}{2yp},$$

于是

$$y=C(p^2+1),\quad x=2C(p-1)(\text{关于 } p \text{ 的参数表示}).$$

1.3 第三题

令 $I=[a,b]$，设 $f(x)$ 在 I 上连续和 $K(x,t)$ 在 $I\times I$ 上连续，证明积分方程

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)y(t)\mathrm{d}t$$

在 I 上存在唯一解 $y(x)$.

常规方法：

存在性：由假设，f 在 I 上连续，且 K 在 $I\times I$ 上连续。于是 f 在 I 上有界，同样地 K 在紧集上连续故有界，设

$$\|f\|:=\sup_{x\in I}|f(x)|<\infty,$$
$$M:=\sup_{(x,t)\in I\times I}|K(x,t)|<\infty.$$

我们定义函数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$：

$$y_0(x):=f(x),$$
$$y_{n+1}(x):=f(x)+\int_a^x K(x,t)y_n(t)\mathrm{d}t,\quad n\geq 0. \tag{1}$$

归纳可得 y_n，$\forall n\in\mathbb{N}^+$ 是连续的，下证明之一致收敛。我们证明（以下的 $\|\cdot\|$ 均指代最大模范数）

$$\|y_n(x)-y_{n-1}(x)\|\leq\frac{M^n(x-a)^n}{n!}\|f\|\leq\frac{M^n(b-a)^n}{n!}\|f\|\quad(n\geq 1,\ x\in I).$$

以下证明上式前一个不等式（后一个显然成立）。首先，对于 $n=1$，因为

$$\|y_1-y_0\|\leq\sup_{x\in I}\int_a^x|K(x,t)||f(t)|dt\leq M(x-a)\|f\|.$$

得证；接下来，设 $n \geq 2$，由归纳假设可得

$$\begin{aligned}|y_{n+1}(x)-y_n(x)| &= |\int_a^x K(x,t)\,(y_n(t)-y_{n-1}(t))\,dt| \\ &\leq \int_a^x |K(x,t)||y_n(t)-y_{n-1}(t)|dt \\ &\leq \int_a^x (M\|f\|)\frac{M^n(t-a)^n}{n!}dt \\ &= \frac{M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|f\|.\end{aligned}$$

归纳完毕。最后，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^n(b-a)^n}{n!}\|f\| < +\infty,$$

维尔斯特拉斯定理给出，y_n 在 I 上一致收敛到某个 I 上函数，记为 $y(x)$。由一致收敛性与 y_n 连续性，y 也于 I 连续；且一致收敛性允许我们对(1)取 $n \to \infty$ 极限得到

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)\mathrm{d}t$$

唯一性：设除了 y，z 也是一个解，设 $h = y - z$，做差得到

$$h(x) = \int_a^x K(x,t)h(t)\mathrm{d}t.$$

于是，

$$|h(x)| \leq M\int_a^x |h(t)|dt.$$

Gronwall 引理直接给出

$$H \equiv 0.$$

唯一性得证。

法二：（利用压缩映射原理） 设 $\max_{I\times I}|K| = M$，在函数空间 $C(I)$ 上，赋予范数 $\|x\| = \max_{t\in I} e^{-M(t-a)}|x(t)|$. 则 $C(I)$ 成为 Banach 空间. 构造算子

$$\mathcal{T}: C(I) \to C(I),\ (\mathcal{T}(x))(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)ds.$$

则任取 $x_1, x_2 \in C(I)$, 有

$$\begin{aligned}
e^{-M(t-a)}\left|(\mathcal{T}x_1)(t)-(\mathcal{T}x_2)(t)\right| &\le e^{-M(t-a)}\int_a^t |K(t,s)||x_1(s)-x_2(s)|ds \\
&\le e^{-M(t-a)}\int_a^t Me^{M(s-a)}\cdot e^{-M(s-a)}|x_1(s)-x_2(s)|ds \\
&\le \|x_1-x_2\| e^{-M(t-a)}\cdot e^{M(s-a)}|_a^t \\
&\le \left(1-e^{-M(b-a)}\right)\|x_1-x_2\|.
\end{aligned}$$

进而有 $\|\mathcal{T}x_1-\mathcal{T}x_2\| \le \theta\|x_1-x_2\|$, 其中 $\theta = 1-e^{-M(b-a)} \in (0,1)$. 所以 $\mathcal{T}$ 是压缩映射, 由压缩映射原理可得 $\mathcal{T}$ 在 $C(I)$ 中存在唯一的不动点，进而积分方程在 I 上有唯一解.

1.4 第四题

讨论微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+y^2}$ 解的最大存在区间。

考虑等价问题（记为 P2）

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = t^2 + x^2 \\ (x,t) \neq (0,0) \end{cases}$$

由于 $f(t,x) = t^2 + x^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 即在全平面上连续可微, 且 $f(t,x)$ 满足局部 Lipschitz 条件, 故 P2 的任一初值问题的解存在唯一。由比较原理, 易得 Ricatti 方程 $\frac{dt}{dx} = t^2 + x^2$ 的任一解的存在区间 (相对于 x) 有界, 且在 t 方向上必趋于正、负无穷远. 但由于 $\frac{dt}{dx} = t^2 + x^2$ 存在唯一一条过 $(0,0)$ 的解, 而 P2 有限制条件 $(t,x) \neq (0,0)$, 故其积分曲线要么从 t 无穷小延伸至原点, 要么从原点延伸至 t 无穷大. 综上可得解的最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$.

1.5 第五题

**设$\varphi(x;x_0,y_0)$ 是初值问题$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - x\sin\frac{y}{x} - y = 0, y(x_0) = y_0$的解,
求出$\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0)}{\partial x_0}|_{x=x_0}$, $\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0)}{\partial y_0}|_{x=x_0}$.**

首先显然有 $\varphi(x_0;x_0,y_0) = y_0$, 其在 $x = x_0$ 的值完全由 y_0 确定，所以

$$\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0)}{\partial y_0}|_{x=x_0} = 1$$

将初值问题进行化简，可以得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right),$$

通过初值条件 $\varphi(x_0; x_0, y_0) = y_0$ 可知

$$\frac{\partial \varphi(x_0; x_0, y_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0; x_0, y_0) * 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(x_0; x_0, y_0) = 0,$$

即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(x_0; x_0, y_0) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0; x_0, y_0),$$

而 $\varphi(x; x_0, y_0)$ 是对应初值问题的解，因此将其导数的形式代入即可得到

$$\frac{\partial \varphi(x; x_0, y_0)}{\partial x_0}|_{x=x_0} = -\left(\frac{y_0}{x_0} + sin\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right).$$