ODE 期末试题解答

题目 1. (10 分) 求方程 $y''+4y'-12y=(-16x+6)e^{2x}+185\cos x$ 的通解.

解答.

对应的齐次方程为 $y''+4y'-12y=0$. ——(1)

其特征方程为 $r^2+4r-12=0$, 解得特征根 $r_1=-6$, $r_2=2$. ——(1)

因此, 齐次方程的通解为 $y=C_1e^{-6x}+C_2e^{2x}$(其中 C_1, C_2 为任意常数). ——(1)

非齐次项为 $(-16x+6)e^{2x}+185\cos x$, 我们采用待定系数法. 这里求 $(-16x+6)e^{2x}$ 和 $185\cos x$ 的特解各两分.

首先求 $y''+4y'-12y=(-16x+6)e^{2x}$ 的特解 y_1.

由于 2 是特征方程的一重根, 故设特解形式为 $y_1=x(ax+b)e^{2x}=(ax^2+bx)e^{2x}$.

求导:

$$y_1'=(2ax+b)e^{2x}+2(ax^2+bx)e^{2x}=[2ax^2+(2a+2b)x+b]e^{2x}, \tag{0.1}$$

$$y_1''=(4ax+2a+2b)e^{2x}+2[2ax^2+(2a+2b)x+b]e^{2x}=[4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b]e^{2x}. \tag{0.2}$$

——(1)

将 y_1、y_1'、y_1'' 代入方程, 整理后比较系数:

$$[4ax^2+(8a+4b)x+2a+4b]+4[2ax^2+(2a+2b)x+b]-12(ax^2+bx)=-16x+6 \tag{0.3}$$

$$\Longrightarrow 16ax+(2a+8b)=-16x+6. \tag{0.4}$$

——(1)

比较系数得方程组:

$$\begin{cases} 16a = -16 \\ 2a + 8b = 6 \end{cases}$$

解得 $a = -1$, $b = 1$, 故 $y_1 = (-x^2 + x)e^{2x}$. ——(1)

求 $y'' + 4y' - 12y = 185\cos x$ 的特解 y_2^* 由于 0 不是特征方程的解, 故设特解形式为 $y_2 = A\cos x + B\sin x$.

求导:

$$y_2' = -A\sin x + B\cos x, \tag{0.5}$$

$$y_2'' = -A\cos x - B\sin x. \tag{0.6}$$

——(1)

代入方程整理得:

$$(-13A + 4B)\cos x + (-4A - 13B)\sin x = 185\cos x.$$

——(1)

比较系数得方程组:

$$\begin{cases} -13A + 4B = 185 \\ -4A - 13B = 0 \end{cases}$$

解得 $A = -13$, $B = 4$, 故 $y_2 = -13\cos x + 4\sin x$. ——(1)

叠加得非齐次方程的特解 $y^* = y_1 + y_2 = (-x^2 + x)e^{2x} - 13\cos x + 4\sin x$, 故原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{2x} + (-x^2 + x)e^{2x} - 13\cos x + 4\sin x$$

这里 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ 为常值.——(1)

注记. 如果通解形式中出现多于两个的参量, 扣一分.

题目 2. (15 分) 求解以下线性微分方程组的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - y - z + 2t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - y - 2z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -x + y + 2z \\ x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$$

解答. 我们首先考虑齐次方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - y - z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - y - 2z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -x + y + 2z \end{cases}$$

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^3$

该方程具有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$——(2)

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

——(2)

取 $(A - I)^2 x = 0$ 一组线性无关解

$$\xi_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xi_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

——(2)

则

$$\xi_{11} = (A - I)\xi_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_{21} = (A - I)\xi_{20} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_{31} = (A - I)\xi_{30} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

——(2)

故齐次方程的基解矩阵为

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1+t & -t & -t \\ 2t & 1-2t & -2t \\ -t & t & 1+t \end{pmatrix}$$

——(2)

记 $f(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则原初值问题的解为

$$\Phi(t)\Phi(0)^{-1}c_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi(s)^{-1}f(s)\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} (3t-1)e^t + 2 \\ (6t-8)e^t + 4t + 8 \\ (4-3t)e^t - 2t - 4 \end{pmatrix}$$

——(5)

题目 3. (15 分) 利用 (广义) 幂级数方法求解微分方程 $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$.

解答. 0 是正则奇点, 故我们可以在 0 的邻域内用广义幂级数法求解.——(1)

设解为 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$, 其中系数 c_k $(k \in \mathbb{N})$ 和指标 ρ 待定. ——(1)

且 $c_0 \neq 0$.——(1)

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1+\rho)x^{n+\rho}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+1+\rho)(n+2+\rho)x^{n+\rho}$$

代入到原方程, 得

$$2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n-1+\rho)(n+\rho)x^{n+\rho} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)x^{n+\rho} + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho} = 0.$$

——(1)

比较 x^ρ 的系数, 得 $2\rho^2 - 3\rho + 1 = 0$. 解得 $\rho = 1$ 或 $\rho = \frac{1}{2}$——(1)

$\rho = 1$ 时, 比较 x^{n+1} 系数得 $c_n = -\frac{c_{n-1}}{2n^2+n}, \forall n \geq 1$.——(1)

故 $c_n = (-1)^n \frac{c_0}{(2n+1)!!\cdot n!} = (-1)^n \frac{2^n c_0}{(2n+1)!}$——(2)

给出解 $y(x) = c_0 x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(2n+1)!} x^n$.——(1)

该解的收敛半径为 ∞, 给出了 $\mathbb{R}$ 上的经典解——(1)

$\rho=\frac{1}{2}$ 时, 比较 $x^{n+\frac{1}{2}}$ 系数得 $c_n=-\frac{c_{n-1}}{2n^2-n}, \forall n\geq 1$.——(1)

故 $c_n=(-1)^n\frac{c_0}{(2n-1)!!n!}=(-1)^n\frac{2^nc_0}{(2n)!}$——(2)

给出解 $y(x)=c_0x^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(2n)!}x^n$.——(1)

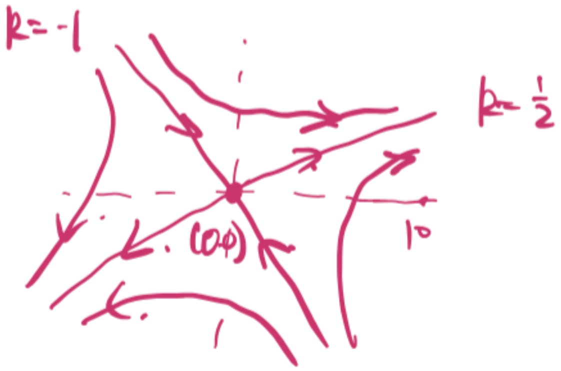
该解在 $[0,\infty)$ 上收敛, 且在 $(0,\infty)$ 上可微, 给出了 $(0,\infty)$ 上的经典解——(1)

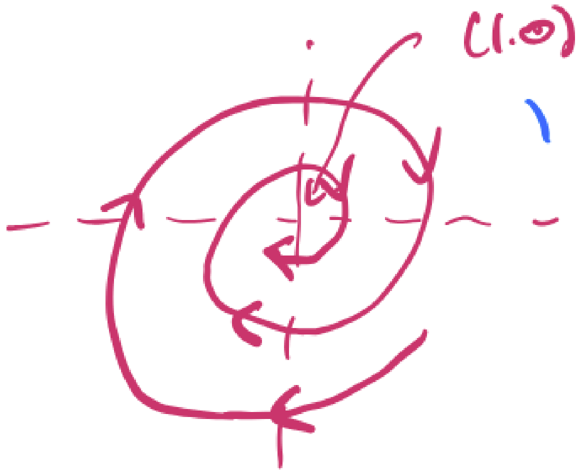
题目 4. (15 分) 画出方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=2y\\ \dot{y}=x-x^2-y\end{cases}$$

在平衡点附近的相图.

解答. 如图, 求平衡点一分, 两处的作图各七分. 鞍点: 判断 2 分, 特殊方向 2 分, 作图 2 分; 焦点: 判断 3 分, 作图 3 分; 说明非线性系统与线性系统奇点类型一致且箭头方向一致 (或奇点类型与稳定性一致) 对于两种情况都是 1 分.





注记. 平衡点 $(0,0)$ 为鞍点,$(1,0)$ 为焦点. 不写出平衡点类型不扣分, 但作画要准确.

题目 5. (15 分) 讨论方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y) \\ \dot{y} = x(1-z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

零解的 Lyapunov 正向稳定性, 其中参数 $\beta \geq 0$.

解答. 不妨将自变量记为 t. ——(1)

$\beta > 0$ 时, 设 $V(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$. ——(2)

则

$$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t),z(t)) = x(t)\dot{x}(t) + y(t)\dot{y}(t) + z(t)\dot{z}(t) = -x^2(t) - y^2(t) - \beta z^2(t),$$

即全导数

$$V^*(x,y,z) = -x^2 - y^2 - \beta z^2.$$

——(3)

由于 V 在 $(0,0,0)$ 附近正定连续可微, 且全导数 V^* 在 $(0,0,0)$ 附近负定, 故此时原系统正向渐进稳定. ——(3)

$\beta = 0$ 时, V 和 $\beta > 0$ 时形式一样, 此时全导数在 $(0,0,0)$ 附近非正, 故此时原系统正向稳定. ——(3)

另一方面, 考虑原方程的解 $(x(t),y(t),z(t)) \equiv (0,0,\delta)$, 这里 $\delta \neq 0$, 可知原系统不正向渐进稳定.——(3)

题目 6. (15 分) $y = \phi(x)$ 是方程

$$(p(x)y')' + q(x)y = 0$$

在有界闭区间 I 上的非平凡解. 如果 $0 < c_1 \le p(x) \le c_2$, $k_1 \le q(x) \le k_2$, 证明:

1. 如果 $k_2 \le 0$, 则 $\phi(x)$ 在 I 上至多有一个零点.

2. 如果 $k_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$ 为 $\phi(x)$ 的相邻零点, 则

$$x_2 - x_1 \ge \pi c_1 \sqrt{\frac{1}{c_2 k_2}}.$$

提示: 如果只对 $p(x) \equiv 1$ 这一特殊情形证明本题的两个结论, 可以得 10 分.

解答. 不妨 $I = [a, b]$. 换元, 设 $\bar{x}(x) = \int_a^x \frac{1}{p(s)} \mathrm{d}s$.

由于 $0 < c_1 \le p(x) \le c_2$, $\bar{x}$ 有反函数, 记为 $x(\bar{x})$. ——(1)

设 $\bar{y}(\bar{x}) = y(x(\bar{x}))$, 原方程转化为

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} + p(x(\bar{x}))q(x(\bar{x}))\bar{y} = 0$$

定义域为 $\bar{I} = [0, \int_a^b p(s)\mathrm{d}s]$——(2)

我们首先对转化后的方程证明原命题. 设转化后的方程的解为 $\bar{\phi}$

1. 将 $\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} + p(x(\bar{x}))q(x(\bar{x}))\bar{y} = 0$ 与 $\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} = 0$ 作比较. ——(1)

   由于 $pq \le k_2 c_1 \le 0$, 取 $\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} = 0$ 的解 $\bar{\phi}_2(\bar{x}) = \bar{x} + 1$, 则 $\bar{\phi}_2$ 在 $\bar{I}$ 上没有零点.——(2)

   由 Sturm 比较定理, $\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} + p(x(\bar{x}))q(x(\bar{x}))\bar{y} = 0$ 在 $\bar{I}$ 上至多只有一个零点.——(2)

2. 将 $\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} + p(x(\bar{x}))q(x(\bar{x}))\bar{y} = 0$ 与 $\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} + k_2 c_2 \bar{y} = 0$ 作比较. ——(1)

   设 $\bar{\phi}$ 在 $\bar{I}$ 上的某两个相邻零点为 $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. 反证法, 若 $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 < \pi\sqrt{\frac{1}{k_2 c_2}}$. 由于 $pq \le k_2 c_1 \le 0$, 取 $\frac{d^2}{d\bar{x}^2}\bar{y} + k_2 c_2 \bar{y} = 0$ 的解 $\bar{\phi}_3(\bar{x}) = \sin(\sqrt{k_2 c_2}(\bar{x} - \bar{x}_1 + \varepsilon))$, 这里 $0 < \varepsilon < \pi\sqrt{\frac{1}{k_2 c_2}} - (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$. 则 $\bar{\phi}_3$ 的某两个相邻零点为 $x_1 - \varepsilon$, $\pi\sqrt{\frac{1}{k_2 c_2}} + x_1 - \varepsilon$. ——(2)

   由 Sturm 比较定理, $\bar{\phi}_3$ 在 $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ 上至少有一个零点, 矛盾! ——(2)

由于转化后的方程有上述结论, 回到原方程, 由于 $\bar{\phi}(\bar{x})$ 在 $\bar{I}$ 上至多有一个零点, 且 (x_0 是 ϕ 的零点)$\Leftrightarrow$ ($\bar{x}_0 := \bar{x}(x_0)$ 是 $\bar{\phi}$ 的零点), 故 $\phi(x)$ 在 I 上至多有一个零点. ——(1)

由于 $\frac{1}{c_1}(x_2 - x_1) \geq \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{p(s)}\mathrm{d}s \geq \pi\sqrt{\frac{1}{k_2 c_2}}$, 原命题第二问成立.——(1)

题目 7. (15 分) 在区间 $[0,1]$ 上考虑 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} y'' + (\lambda + x)y = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

1. 根据第七章 Sturm-Liouville 边值问题的理论, 关于上述边值问题的特征值和特征函数, 你能得到哪些结论?
2. 证明: 没有负特征值, 即对于任意非零解, $\lambda \geq 0$.

提示: 方程两边同乘 y 后再在 $[0,1]$ 上积分. 有可能需要如下的 Cauchy-Schwartz 不等式: 对于任意的区间 $I \subset \mathbb{R}$,

$$\left|\int_I f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_I |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

解答.

1. 该边值问题有无穷多个特征值 $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$. ——(1)

   $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$. ——(1)

   对应于 $\lambda_n (n \in \mathbb{N})$ 的特征函数 $\phi(x, \lambda_n)$ 在 $(0,1)$ 中恰好有 n 个零点. ——(1)

   对应于 $\lambda_n (n \in \mathbb{N})$, 该边值问题有且仅有一个线性无关的特征函数. ——(1)

   当 $m \neq n$ 时, $\int_0^1 \phi(x, \lambda_m)\phi(x, \lambda_n)\mathrm{d}x = 0$. (直接说两两正交但不给出正交的具体定义不得分) (说在 $L^2[0,1]$ 中正交也能得全分)——(1)

2. 任取非零解 y 和 $\lambda < 0$ 满足原边值问题. 按照提示, 我们有

   $$-\int_0^1 (y')^2(x)\mathrm{d}x + \lambda \int_0^1 y^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 xy^2(x)\mathrm{d}x = 0$$

   故

   $$\lambda = \frac{\int_0^1 (y')^2(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 xy^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 y^2(x)\mathrm{d}x}$$

——(3)

由于

$$y(x) = \int_0^x y'(s)\mathrm{d}s = -\int_x^1 y'(s)\mathrm{d}s$$

——(2)

由 Cauchy 不等式,

$$|y(x)| \leq \min\{x^{\frac{1}{2}}, (1-x)^{\frac{1}{2}}\} \cdot (\int_0^1 (y')^2(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}(\int_0^1 (y')^2(x)\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$$

——(2)

故

$$\int_0^1 xy^2(x)\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 (y')^2(x)\mathrm{d}x \int_0^1 x\mathrm{d}x = \int_0^1 (y')^2(x)\mathrm{d}x$$

——(2)

于是 $\lambda \geq 0$, 原命题成立.——(1)