中国科学技术大学 2025 年期中考试

《数值分析》

(数学学院相关专业)

一. 对 Hermite 插值数据 $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(1)=0$ 写出 Newton 差商表，并写出插值函数。

二. 在 $[-2,1]$ 区间上求函数 $f(x)=|x|$ 的最佳一致逼近线性多项式函数。

三. 求自然三次样条函数，使其插值数据 $(-1,1)$, $(0,-1)$ 和 $(2,1)$。

四. 考虑如下数值积分公式:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(-\alpha) + w_1 f(\alpha),$$

其中 $0<\alpha\leq 1$。

1). 当要求数值积分公式对线性多项式准确成立时，证明 $w_0=w_1=1$ 与 α 的选择无关。

2). 求 α 的特殊取值，使得数值积分公式对 2 次多项式准确成立。

五. 考虑权函数为 $w(x)=-\ln(x)$ 的加权 L_2 空间。

1). 构造 $(0,1)$ 区间上的 0, 1, 2 次正交多项式。

2). 给出 $(0,1)$ 区间上的 1 点和 2 点 Gauss 积分公式的积分节点和权重。

六. 当 $u(x)\in H^r_{per}[0,2\pi]$ 时，对其三角函数逼近

$$\mathcal{P}_{2N}u(x) = \sum_{|n|\leq N} \hat{u}_n e^{inx},$$

估计 $||u-\mathcal{P}_{2N}u||_{L^2[0,2\pi]}$。

七. 设函数 $f\in\mathcal{C}[-a,a]$ 是一个偶函数，证明该函数的最佳一致逼近也是偶函数。

数值分析 2025 小测 一、二、三

一、共15

$$
\begin{array}{cc|cccc}
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 & 1 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & \\
1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 1 & & & &
\end{array}
$$

10'

$$\Rightarrow p(x) = 1 - x - x^3 + 2x^3(x-1)$$
$$= 1 - x - 3x^3 + 2x^4$$

5'

二、共15 $p(x) = ax + b$ 为 $f(x)$ 的最佳一致逼近线性多项式函数.

则 $p(-2) - f(-2) = p(1) - f(1) = f(0) - p(0)$ 10'

在 -2, 0, 1 处取到.

$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $p(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ 5'

三、共15

$$p(x) = \begin{cases} p_0(x) & x \le 0 \\ p_1(x) & x > 0 \end{cases}$$

$p_0(x) = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0$

$p_1(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$

$p(x)$ 三次样条

$p_0''(0) = p_1''(0) \Rightarrow b_0 = b_1$

0处、-1处、2处条件各4'

4' 4' 4'

$p(-1) = 1$, $p(0) = -1$, $p(2) = 1$

又 $p(x)$ 自然 $\Rightarrow p_0''(-1) = p_1''(2) = 0$

且 $p_0'(0) = p_1'(0)$

结果 3'

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ b_0 = \frac{3}{2} \\ c_0 = -1 \\ d_0 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{4} \\ b_1 = \frac{3}{2} \\ c_1 = -1 \\ d_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - 1 & x \in [-1, 0] \\ -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - 1, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

《数值分析》期中考试解答

日期：May 10, 2025

四.(1) 只需要考虑取 $f(x)=1,x$,

$$\int_{-1}^{1} 1dx = w_0 + w_1, \int_{-1}^{1} xdx = w_0(-\alpha) + w_1\alpha$$

解得 $w_0 = w_1 = 0$.

(2) 在（1）的基础上，只需要考虑取 $f(x)=x^2$，

$$\int_{-1}^{1} x^2dx = (-\alpha)^2 + \alpha^2$$

解得 $\alpha = 1/\sqrt{3}$

五.(1) 如下等式在计算中是有用的

$$\int_0^1 x^n(-\ln x)dx = \frac{1}{(n+1)^2}$$

先取 0 次多项式 $\phi_1(x)=1$, 那么 1 次多项式为

$$\phi_2(x) = x - \frac{\int_0^1 x\cdot 1(-\ln x)dx}{\int_0^1 1\cdot 1(-\ln x)dx} = x - \frac{1}{4}$$

2 次多项式为

$$\begin{aligned}\phi_3(x) &= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2\cdot x(-\ln x)dx}{\int_0^1 1\cdot 1(-\ln x)dx} - \frac{\int_0^1 x^2\cdot (x-1/4)(-\ln x)dx}{\int_0^1 (x-1/4)^2(-\ln x)dx}(x-\frac{1}{4})\\ &= x^2 - \frac{1}{9} - \frac{5}{7}(x-\frac{1}{4})\\ &= x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{17}{252}\end{aligned}$$

(2)1 点的积分节点为 $\phi_2(x)$ 的根, 即 $x_1 = 1/4$, 权重为

$$w_1 = \int_0^1 (-\ln x)dx = 1$$

2 点的积分节点为 $\phi_3(x)$ 的根，即

$$x_1 = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{106}}{42}, x_2 = \frac{5}{14} - \frac{\sqrt{106}}{42}$$

对应权重为

$$w_1 = \int_0^1 \frac{x-x_2}{x_1-x_2}(-\ln x)dx = \frac{1}{2} - \frac{9}{4\sqrt{106}}, w_2 = \int_0^1 \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(-\ln x)dx = \frac{1}{2} + \frac{9}{4\sqrt{106}}$$

六. 任取 $0 \le q \le r$，有

$$\begin{aligned}\|u-\mathcal{P}_{2N}u\|^2 &= \|\sum_{|n|>N}\hat{u}_n e^{inx}\|^2 = 2\pi\sum_{|n|>N}|\hat{u}_n|^2\\ &\le 2\pi\sum_{|n|>N}\frac{1}{n^{2q}}|n^q\hat{u}_n|^2 \le \frac{2\pi}{N^{2q}}\sum_{|n|>N}|n^q\hat{u}_n|^2 = \frac{2\pi}{N^{2q}}\sum_{|n|>N}|\widehat{u^{(q)}}_n|^2\\ &\le \frac{1}{N^{2q}}\|u^{(q)}\|^2\end{aligned}$$

综上，

$$\|u-\mathcal{P}_{2N}u\| \le \frac{1}{N^q}\|u^{(q)}\|, \quad \forall 0 \le q \le r$$

七. 若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳一致逼近，记 $\|p-f\| = C = \min_{g\in V}\|f-g\|$, 有

$$\max_{x\in[-a,a]}|p(x)-f(x)| = C$$

取换元 $y=-x$, 有

$$C = \max_{y\in[-a,a]}|p(-y)-f(-y)| = \max_{y\in[-a,a]}|p(-y)-f(y)|$$

因此 $p(-x)$ 也为 $f(x)$ 的最佳一致逼近，由唯一性知 $p(x)=p(-x)$,$p(x)$ 为偶函数.