

1 Mathematical Statistics 2025 mid

1. (10分) X_i, Y_j ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 8$) i.i.d. $N(0, \sigma^2)$. 平均值为 \bar{X}, \bar{Y} .

(1) 求 $\mathbb{P}(\sqrt{\bar{X}^2 + 2\bar{Y}^2} \leq 1.36\sigma)$.

(2) 求 $\mathbb{P}(|\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}| \leq c) = 0.9$ 的 c .

2. (10分) 设样本 $X_1 \dots X_n$ 取自 $N(\mu, \sigma^2)$.

(1) 给出 $\nu = \frac{\mu}{\sigma}$ 的一个矩估计 ν_{MOM} .

(2) 若 $\mu = 0$, 对你的估计, 在 $n = 3$ 时求 $\mathbb{P}(\nu_{MOM} \geq 3)$.

3. (15分) 设样本 $X_1 \dots X_{2m+1}$ 取自 $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$. 求样本中位数的期望值.

4. (20分) 设分布族 $f(x, \theta) = \theta^{-1}e^{-\frac{x-\theta}{\theta}}$ ($x \geq \theta$), 这里 $\theta > 0$ 为未知参数. 从该分布族中取出样本 $X_1 \dots X_n$.

(1) 这个分布族是指数族吗?

(2) $X_{(1)}$ 是充分统计量吗? 如果不是, 试找出一个不是 $(X_1 \dots X_n)$ 的充分统计量.

(3) (2)中你给出的充分统计量是完全的吗?

5. (10分) 设分布族 $f(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2}$ ($0 \leq x \leq \theta$). 这里 $\theta > 0$ 为未知参数. 从该分布族中取出样本 $X_1 \dots X_n$. 找出一个 θ 的完全统计量.

6. (15分) 设分布族 $f(x, \lambda) = \lambda x^{-(\lambda+1)}$ ($x \geq 1$). 这里 $\lambda > 0$ 为未知参数. 从该分布族中取出样本 $X_1 \dots X_n$.

(1) 试找出 $\ln X$ 的分布.

(2) 求证 $\frac{\ln X_1}{\sum_{k=1}^n \ln X_k}$ 与 $\prod_{k=1}^n X_K$ 独立.

7. (10分) 从分布族 $U(\theta_1, \theta_2)$ 中取出样本 $X_1 \dots X_n$. 这里 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ 为未知参数. 给出 $\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \theta_2$ 的矩估计. $\theta_1 + \theta_2$ 的矩估计是无偏的吗?

8. (10分) 设样本 $X_1 \dots X_n$ 取自分布族 $f(n, p) = p(1-p)^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}_+$). 这里 $0 < p < 1$ 为未知参数. 试给出 p 的一个极大似然估计.