1 Mathmatical Statisics 2025 final

1. (20分) 设 $X_1 \cdots X_{10}$ i.i.d $Bernoulli(p)$.

(1) 求出 $X_1 \cdots X_{10}$ 的密度函数，并求出 $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$ 的密度函数.

(2) 求出 p 的无偏估计方差的 C-R 下界.

(3) 给出 p 的一个无偏估计 $\hat{p}$ 并求其效率.

2. (10分) 设 $X_1 \cdots X_n$ 取自如下分布：

$$f(x, \theta) = \frac{2x}{\theta^2}\ (0 \le x \le \theta),$$

这里 θ 的先验分布服从 $U(0, 1)$.

(1) 给出 θ 的后验分布.

(2) 求出 $\eta = \theta^{-1}$ 的 Bayes 估计.

3. (20分) 有两架天平，它们的误差服从正态分布。

(1) 对其中一架天平称量某物品16次，得到 $\overline{X_1} = 1.8$, $S_1^2 = 0.04$, 是否认为物品的质量 $a > 2$, 取检验水平 $\alpha = 0.10$.

(2) 用另一架天平称量该物品20次，得到 $\overline{X_2} = 1.9$, $S_2^2 = 0.09$, 是否认为两个天平的方差相等，取检验水平 $\alpha = 0.20$.

4. (20分) 设 $X_1 \cdots X_n$ $(n \ge 2)$ 取自如下分布：

$$f(x, \theta) = \theta x^{-2}\ (x \ge \theta),$$

这里 $\theta > 0$ 未知。

(1) 给出这个模型的一个充分完全统计量。

(2) 求出 $\eta = \theta + \theta^{-1}$ 的 UMVUE.

(3) 求出 θ 置信系数为 $1 - \alpha$ 的置信上限。

5. (15分) 设 $X_1 \cdots X_n$ 取自如下分布：

$$f(x|\lambda) = \lambda x^{\lambda - 1}\ (0 \le x \le 1),$$

这里 $\lambda > 0$ 未知。

考虑检验

$$H_0 : \lambda = 1 \leftrightarrow H_1 : \lambda \ne 1.$$

(1) 求证 $Y = -\ln X$ 服从分布 $Exp(\lambda)$.

(2) 给出一个水平为 α 的似然比检验。

6. (15分) 设 $X_1 \cdots X_n$ 取自如下分布：

$$f(x,\mu) = e^{-(x-\mu)} \ (x \geq \mu),$$

这里 $\mu \in \mathbb{R}$ 未知。

考虑检验

$$H_0 : \mu = 0 \leftrightarrow H_1 : \mu > 0.$$

(1) 给出一个水平为 α 的 UMPT.

(2) 求出此检验的功效函数。