2025 秋数理统计进阶（MATH3016）期末考试（回忆版）*

授课教师：兰小红

2026 年 1 月 8 日 19:00-21:00

题目 1. (30 分) 调查 n 个人对某件事是否支持：支持用“1”表示，不支持用“0”表示，假设每个人对该事件支持的可能性为 p，$0<p<1$. 各人之间相互独立，记调查结果为 $X_1,\cdots,X_n$（X_i 取值 0 或 1）. 当 $n\to\infty$ 时，请分别给出：

a) p 和 $\eta=p(1-p)$ 的一个相合估计量 $\hat{p}_n$ 和 $\hat{\eta}_n$，说明理由；

b) 上述 a) 中 $\hat{p}_n$ 和 $\hat{\eta}_n$ 的渐近分布，说明理由；

c) p 和 η 的置信水平为 $1-\alpha$ 的一个近似置信区间.

题目 2. (30 分) 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim$ Poisson(λ)，其 $p.m.f.$ 为

$$f(x|\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\ x=0,1,2,\cdots$$

$\lambda>0$ 未知.

a) 请给出 λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}}$ 及其渐近分布；

b) 样本方差 S^2 是 λ 的矩估计之一，请给出 S^2 的渐近分布；

提示：$EX_i^3=\lambda(\lambda^2+3\lambda+1)$, $EX_i^4=\lambda(\lambda^3+6\lambda^2+7\lambda+1)$

c) 求 $\hat{\lambda}_{\mathrm{MLE}}$ 关于 S^2 的 ARE.

题目 3. (25 分) 设样本 $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d.$\sim X$，φ 是 $(-\infty,\infty)$ 上一个处处连续可微函数，满足：对参数空间任意 θ 值，$E_\theta[\varphi(X-\theta)]$，$E_\theta|\varphi(X-\theta)|^2$ 以及 $E_\theta\varphi'(X-\theta)$ 均存在有限，且 $E_\theta\varphi'(X-\theta)\neq 0$. 假设 θ_0 是方程 $E_\theta\varphi(X-\theta)=0$ 的唯一解，而 $\hat{\theta}_n$ 是 $\sum_{i=1}^n\varphi(X_i-\theta)=0$ 的解（对一切 n 和样本均存在），并且满足 $\hat{\theta}_n\xrightarrow{\text{a.s.}}\theta_0$.

a) 证明 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\ \frac{E_{\theta_0}[\varphi(X-\theta_0)]^2}{|E_{\theta_0}\varphi'(X-\theta_0)|^2}\right)$；

b) 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x & |x|\le 1/2\\ \mathrm{sgn}(x)/2 & |x|>1/2\end{cases}$，总体 $X\sim U(\theta-1,\theta+1)$，请给出 θ 基于估计量 $\hat{\theta}_n$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的一个近似置信区间.

题目 4. (15 分) 观察一个四面体的骰子是否均匀，投掷了 100 次，记录数据如下

点数	1	2	3	4
次数	20	30	40	10

问：骰子是否均匀？请给出一个近似水平 $\alpha=0.10$ 的似然比检验结果.

后附 χ^2 分布表（略）.

*本次考试允许携带计算器，且考前通知了不考察 Wald 检验，计分检验和拟合优度检验.