

线
订
装

中国科学技术大学数学科学学院
2025 ~ 2026 学年秋季学期期中考试试卷

课程名称 数学分析 (B3) 课程编号 MATH1008
考试时间 25/11/18 9:45-11:45 考试形式 闭卷
姓 名 学 号 学 院

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、【30 分】如下三小问每问 10 分.

- (1) 分别叙述实数列的上极限和实数集的闭包的定义.
- (2) 设实数列 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{k_n}\}$ 严格单调收敛于 a . 证明: a 是集合 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 的聚点.

- (3) 设 $\{x_n\}$ 是有界实数列, 记它的极限点集合为 A . 证明: 并集 $A \cup \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集.

二、【24 分】设 f 为 $\mathbb{R}$ 上 2π 周期实值连续函数.

- (1) 【8 分】叙述 f 的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

的定义.

(2) 【8 分】 设 f 在 $x = 0$ 处存在左、右导数. 记

$$S_0 f(x) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 1, 2, \dots.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(0) = f(0)$.

(3) 【8 分】 记 $\sigma_n f = \frac{S_0 f + S_1 f + \dots + S_n f}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. 证明: $\sigma_n f$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 f .

三、【20 分】设 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微。

- (1) 设导函数 f' 在 $[-1, 1]$ 上连续。证明: f 在 $[-1, 1]$ 上一致可微, 即任取 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对于任意 $x, y \in [-1, 1]$, 只要 $0 < |x - y| < \delta$, 就有

$$\left| f'(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \epsilon.$$

- (2) 在 (1) 中去掉 “ f' 在 $[-1, 1]$ 上连续” 之条件, 请问 f 仍在 $[-1, 1]$ 上一致可微吗? 若成立, 请给证明; 若否, 请举反例。

四、【26 分】设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 的紧致子集 D 上的连续实值函数列, 且在 D 上一致收敛. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛实级数.

(1) 【4 分】设实数列 $\{b_n\}$ 满足对于任意 n 都有 $|b_n| \leq |a_n|$. 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$ 在 D 上一致收敛.

(2) 【4 分】证明: 函数族 $\mathcal{F} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n : |b_n| \leq |a_n| \right\}$ 一致有界, 即存在正数 M , 对于任意 $f \in \mathcal{F}$ 和任意 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$.

(3) 【8 分】证明: 函数族 $\mathcal{F}$ 一致等度连续, 即任取 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对于任意 $x, y \in D$ 且 $|x - y| < \delta$, 对于任意 $f \in \mathcal{F}$, 都有 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(4) 【10 分】证明: 任意 $\mathcal{F}$ 中的函数列 $\{g_m : D \rightarrow \mathbb{R}\}$ 都有一致收敛子列, 且极限函数属于 $\mathcal{F}$.

24/11/18 数分 (B3) 期中考试解答与评分标准

1. (i-ii) 略

(iii) 由于数列 $\{x_n\}$ 有界, 那么 $B := A \cup \{x_1, x_2, \dots\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的有界子集 (2 分).

任取 B 的聚点 y , 约化为证明 $y \in A$, i.e. y 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点 (3 分).

事实上, 由性质 14.46, 存在 B 中一列点 $y_1, y_2, \dots$ 使得 $y \neq y_n \rightarrow y$. 下面分两种情况讨论.

- 若数列 $\{y_n\}$ 包含 $\{x_n\}$ 的无限多项, 即包含其一子列, 则 $y \in A$ (2 分)。
- 若不然, 则存在 N , 对于任意 $n > N$: y_n 属于 $A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ 。不妨设任意 y_n 都属于 $A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$ 。如下通过递推方式构造 $\{x_n\}$ 的收敛于 y 的子列 $\{x_{n_k}\}$ (3 分):

1. 当 $k = 1$ 时, 由于 y_1 是 $\{x_n\}$ 的极限点, 存在 x_{n_1} 与 y_1 的距离小于 1;
2. 当 $k = 2$ 时, 由于 y_2 是 $\{x_n\}$ 的极限点, 存在 $n_2 > n_1$, 使得 x_{n_2} 与 y_2 的距离小于 $\frac{1}{2}$;
3. 依次类推, 对于一般 $k \geq 3$, 存在 $n_k > n_{k-1}$, 使得 x_{n_k} 与 y_k 的距离小于 $\frac{1}{k}$ 。

2. (i,iii) 略

(ii) 由定理 15.47, 只需证明: 当 $0 < |t| \ll 1$ 时, 函数

$$\frac{f(t) + f(-t) - 2f(0)}{t}$$

有界 (4 分). 事实上, 记 f 在 $x = 0$ 处的左导数和右导数分别为 A 和 B , 当 $t > 0$ 充分小时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t) + f(-t) - 2f(0)}{t} \right| &\leq \left| \frac{f(t) - f(0)}{t} \right| + \left| \frac{f(-t) - f(0)}{-t} \right| \\ &= |A| + |B| + \left| \frac{o(t)}{t} \right| \leq |A| + |B| + 1; \end{aligned}$$

当 $-t > 0$ 充分小时也成立相同的估计 (4 分).

3. (i) 由于 f' 在 $[-1, 1]$ 上连续, 从而一致连续, i.e. 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对于任意 $x, z \in [-1, 1]$ 且 $|x - z| < \delta$, 成立 $|f'(x) - f'(z)| < \epsilon$ (5 分). 对于任意 $x, y \in [-1, 1]$ 且 $0 < |x - y| < \delta$, 由微分中值定理, 存在 x 与 y 之间的数 z , 使得

$$\begin{aligned} 0 < |x - z| &< |x - y| < \delta, \\ \left| f'(x) - \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| &= |f'(x) - f'(z)| < \epsilon \text{ (5 分)}. \end{aligned}$$

(ii) 存在反例如下: 设 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \in [-1, 1]$ (5 分). 事实上, $f'(0) = 0$, 且当 $x \neq 0$ 时我们有

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \text{ (2 分)}.$$

令 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = -\frac{1}{2n\pi}$, $n = 1, 2, \dots$, 那么 $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ 但

$$\left| f'(x_n) - \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| = 1 \text{ (3 分)}.$$

4. (i) 先证明 “ $\{f_n\}$ 一致有界”. 事实上, 由一致收敛的 Cauchy 准则, 存在 N , 对于任意 $k > N$, 对于任意 $x \in D$, 都有

$$|f_k(x) - f_N(x)| < 1 \text{ (1 分)}.$$

由于 $|f_1|, \dots, |f_N|$ 为紧致集合 D 上的连续函数, 它们都有界, 记它们公共的界为 M' (2 分). 那么函数列 $\{f_n\}$ 的界为 $1 + M'$ (1 分). 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ 与 Weierstrass 判别法, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$ 在 D 上一致收敛 (2 分).

(ii) $\mathcal{F}$ 的任意函数都有公共界

$$M := 1 + (1 + M') \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ (4 分)}.$$

4 (ii) 任取 $\epsilon > 0$, 存在 N , 使得 $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{4(1+M')}$. 那么任取 $f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$, 对于任意 $x, y \in D$, 都有

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n f_n(x) - \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n f_n(y) \right| \leq 2(1+M') \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \text{ (2 分)}.$$

由于紧致集合 D 上连续函数族 $\{f_1, \dots, f_N\}$ 一致等度连续, i.e. 存在 $\delta > 0$, 对于任意 $x, y \in D$ 且 $|x - y| < \delta$, 都有对于任意 $g \in \{f_1, \dots, f_N\}$ 都有,

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{2(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)} \text{ (3 分)}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \sum_{n=1}^N b_n (f_n(x) - f_n(y)) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n (f_n(x) - f_n(y)) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N |a_n| |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \frac{\epsilon \cdot \sum_{n=1}^N |a_n|}{2(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \text{ (3 分)}. \end{aligned}$$

(iii) 任取 $\mathcal{F}$ 中的函数列 $\{g_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(m)} f_n\}$, 由于对于任意 n , 诸数列 $\{b_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 一致有界, 利用 Bolzano-Weierstrass 定理与对角线论证法, 存在 $\{g_m\}$ 的子列, 不妨设即为 $\{g_m\}$ 自身, 使得对于任意 n , 数列 $\{b_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛于 b_n , 且 $|b_n| \leq |a_n|$ (4 分). 令 $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$, 那么 $g \in \mathcal{F}$ (2 分). 任取 $\epsilon > 0$, 存在 N , 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n^{(m)} - b_n| \cdot |f_n| \leq 2(1+M') \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2} \text{ (2 分)}.$$

对于 $n = 1, 2, \dots, N$, 有 $\lim_{m \rightarrow \infty} b_n^{(m)} = b_n$, 那么当 m 充分大时, 成立

$$|b_n^{(m)} - b_n| < \frac{\epsilon}{2N(1+M')},$$

从而有

$$\sum_{n=1}^N |b_n^{(m)} - b_n| \cdot |f_n| \leq (1+M') \sum_{n=1}^N |b_n^{(m)} - b_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

综上, 我们得到

$$|g_m - g| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(m)} - b_n| \cdot |f_n| < \epsilon \text{ (2 分)}.$$