中国科学技术大学2024-2025第二学年
数学分析B2期中考试试卷参考评分标准

2025年4月26日

一、 计算题 (每题10分，共计50分)

(1) 设$u=\sin(x^2+e^{xy})$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

Proof.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(2x+ye^{xy})\cos(x^2+e^{xy}),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=xe^{xy}\cos(x^2+e^{xy}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}\cos(x^2+e^{xy})-xe^{xy}(2x+ye^{xy})\sin(x^2+e^{xy}).$$

参考：答案正确，3分+3分+4分。 □

(2) 计算 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$;

Proof.

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1(\sin x-x\sin x)\mathrm{d}x=1-\sin 1.$$

参考：交换积分次序正确，可得5分；答案正确，再得5分。 □

(3) 求函数 $u=x^2(y+z)$ 在 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{array}{l}x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\\ x+y+z\le 1\end{array}\right\}$ 上的最值.

Proof. 易知：最小值为0, 正确可得3分；

正确判断得出函数的最大值只能在边界上，得3分；

正确计算得出最大值是 $\dfrac{4}{27}$, 得4分。 □

(4) 设 Ω是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $z=0$ 所围成的上半部分，试求

$$I=\iiint_\Omega (x^3+y^5+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Proof. 根据对称性，我们有

$$I=\int_\Omega z\,dV=\frac{\pi abc^2}{4}.$$

参考：方法很多种。如果答案错误，方法有一定的合理性，可以适当给分，但得分建议不超过5分。 □

(5) 求函数 $g(x,y,u,v)=x^2+y^2+u^2+v^2$ 在约束条件$xu-yv=1$下的极值.

Proof. 正确判断得出函数无最大值，得5分；正确计算得出函数的最小值是2，得5分； □

二、 (12分) 设 α 为非负常数，试证：函数

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)=(0,0), \\ \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处可微当且仅当 $\alpha>\frac{3}{2}$.

Proof. 按照定义计算得出 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, 得2分。当且仅当两部分证明都正确，各给5分。 □

三、 (12分) 试证：方程 $z^3-2xz+y-2z+1=0$ 在点$P_0(0,0,1)$附近确定隐函数 $z=z(x,y)$, 并求该函数在$(x,y)=(0,0)$处的二阶 Taylor展开式.

Proof. 记 $F(x,y,z)=z^3-2xz+y-2z+1$. 注意到

$$F(0,0,1)=0,\quad F'_z(0,0,1)=1\neq 0,\quad F\in C^\infty,$$

由隐函数定理知道，在点$P_0(1,1,1)$附近确定一个光滑的隐函数$z=z(x,y)$使得 $z(0,0)=1$. 4分

方法1. 计算1、2阶偏导数(部分正确可以适当给分，如一个偏导数1分，但不超过4分)，代入公式得到正确结果得8分。

方法2. 设 $z=1+\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)+o(x^2+y^2)$，其中 $\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)$分别是关于 x和y的齐1、2次多项，代入方程可以得到

$$\varphi_1+\varphi_2+3\varphi_1^2-2x\varphi_1-2x+y+o(x^2+y^2)=0,$$

从而有： $\varphi_1(x,y)=2x-y,\qquad \varphi_2(x,y)=10xy-8x^2-3y^2$. 也就是说：

$$z=1+2x-y+10xy-8x^2-3y^2+o(x^2+y^2).$$

□

四、 (8分)设 S_O 表示空间中以 O 为中心，边长为2的立方体.平移 S_O 得到立方体 S_P，其中P是它的中心。记

$$\Omega=\{P\,|S_O\cap S_P\text{ 的体积 }\geq 4\}$$

试求Ω的体积.

Proof. 建立坐标系使得：立方体的中心$O(0,0,0)$, 顶点坐标为 $(\pm1,\pm1,\pm1)$.

$\Omega=\{P(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|(2-|x|)(2-|y|)(2-|z|)\ \geq 4,\ 0\leq|x|,|y|,|z|<2\}$.

因此有Ω的体积可表示为： (**给出正确的表示，可给4分**)

$$\mu(\Omega)=8\int_{\Omega_1}d\mu,$$

这里 $\Omega_1=\{P(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|(2-x)(2-y)(2-z)\ \geq 4,\ 0\leq x,y,z<2\}$.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}d\mu &= \int_0^1 dz\iint_D dxdy=\int_0^1 dz\int_0^{2-\frac{2}{2-z}}dy\int_0^{2-\frac{4}{(2-y)(2-z)}}dx\\ &= \int_0^1 dz\int_0^{2-\frac{2}{2-z}}[2-\frac{4}{(2-y)(2-z)}]dy\\ &= 4\int_0^1\left(1-\frac{1}{2-z}-\frac{\ln(2-z)}{2-z}\right)dz\\ &= 4-4\ln 2-2\ln^2 2,\end{aligned}$$

这里 $D=\{(x,y)|(2-x)(2-y)\geq \frac{4}{2-z}, 0\leq x,y<2\}$. 因此$\Omega$的体积为 $\mu(\Omega)=32-32\ln 2-16\ln^2 2$. $\square$

五、 (10分) 设 $D=[0,1]\times[0,1]$.

(1) 设$g(x,y)=\frac{1}{4}xy(1-x)(1-y)$，求 $\iint_D g(x,y)dxdy$;

(2) 设函数 $f(x,y)$在平面$\mathbb{R}^2$上有任意阶连续的偏导数，且

$$f(x,y)=0,\ (x,y)\in\partial D;\quad \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right|\leq 1,$$

试证：$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right|\leq \frac{1}{144}$.

Proof. (1). $\iint_D g(x,y)dxdy=\frac{1}{144}$. $\cdots\cdots$2分

(2). 注意到 $f|_{\partial D}=0$ 和 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|_{y=0\,or\,1}=0$，从而有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 fd\frac{\partial^3 g}{\partial x^2\partial y}$$
$$=-\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{\partial^3 g}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}dy=-\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}d\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\iint_D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dxdy.\quad \cdots\cdots 3分$$

进一步注意到

$$\int_0^1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}dy=\frac{1}{4}\int_0^1 y(1-y)d\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}=-\frac{1}{4}\int_0^1(1-2y)\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}dy$$
$$=-\frac{1}{4}\int_0^1(1-2y)df(0,y)=0,\quad 这里注意到\ f(0,y)=0.$$

同理可证：

$$\int_0^1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{x=1}dy=0.\qquad \cdots\cdots 3分$$

注意：若学生从 $f(0,y)=f(1,y)=0$ 给出结论：$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{x=0\,or\,1}=0$，也可以.

从而有

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dx=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}d\frac{\partial g}{\partial x}\\
&=\int_0^1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}dy-\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}dx\\
&=-\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dg=\int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}g\,dx=\iint_D g\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dxdy.
\end{aligned}$$

因此可得

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right|=\left|\iint_D g\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dxdy\right|\le\iint_D g(x,y)dxdy=\frac{1}{144}.$$

到此为止，我们完成了证明。 $\cdots\cdots$2分 □

注记. 如果没有证明： $\int_0^1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}dy=0$ 或者 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_{x=0\,or\,1}=0$，直接给出

$$\iint_D f\frac{\partial^4 g}{\partial x^2\partial y^2}dxdy=\iint_D g\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}dxdy$$

至少要扣3分。

六、 (8分) 设 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 是定义在 $(0,0)$ 附近的两个连续可微函数。

(1) 若存在一个连续可微函数 $g(t)$ 使得 $\psi(x,y)=g(\varphi(x,y))$, 试证：

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\equiv 0.$$

(2) 若 $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}\equiv 0$ 且 $\nabla\varphi|_{(0,0)}\neq 0$. 试证：存在一个连续可微函数 $g(t)$ 使得在$(0,0)$附近有

$$\psi(x,y)=g(\varphi(x,y)).$$

Proof. (1). 直接计算有： $\psi'_x=g'\varphi'_x,\psi'_y=g'\varphi'_y$，从而知结论成立。......2分

(2). 记： $\varphi(0,0)=a,\quad \psi(0,0)=b.$ 注意到 $\nabla\varphi\neq 0$，不妨设 $\varphi'_x\neq 0$，于是由隐函数定理可知 $u=\varphi(x,y)$，在$(0,0,a)$附近可以确定连续可微函数 $x=f(y,u)$ 使得 $x(0,a)=0$，且有 2分

$$x=f(y,\varphi(x,y)),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\varphi'_y}{\varphi'_x}.$$

令 $g(y,u)=\psi(f(y,u),y)$，则有

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial y}=-\frac{\varphi_y'}{\varphi_x'}\psi_x'+\psi_y'=\frac{1}{\varphi_x'}\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}=0.$$

这表明 $g=g(u)$，从而 $g(\varphi(x,y))=\psi(f(y,\varphi(x,y)),y)=\psi(x,y)$. ....4分 $\square$