中国科学技术大学2024-2025第二学年
数学分析B2期末考试试卷参考答案

2025年7月2日

姓名：__________ 系别：__________ 学号：__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、 (10分) 判断题，正确的用$\surd$表示，错误的用$\times$表示.

得分	

(1) 设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微，则有

A. $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续； ($\surd$)

B.$f(x,y)$在点$(0,0)$的一个邻域内存在偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$; ($\times$)

C. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在点$(0,0)$处连续. ($\times$)

(2) 设函数$f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上有定义，且具有一阶连续偏导数. 记 $I=[0,1]\times[0,1]$.

A. 存在$(x_0,y_0)\in I$ 使得 $\displaystyle\iint_I f(x,y)dxdy=f(x_0,y_0)$. ($\surd$)

B. 存在$(x_0,y_0)\in I$ 满足 $f(1,1)-f(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$; ($\surd$)

二、 (10分) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,\mathrm{d}x$.

得分	

解. 主要是借助Beta函数和余元公式.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}}{n}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}B(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}) \qquad \cdots\cdots 5\ \text{分}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(1-\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}=1. \qquad \cdots\cdots 5\ \text{分}$$

三、 (16分) 将函数$f(x)=x$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数，并计算

得分	

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

解. 第一步：将 $f(x)=x$ 展开成余弦级数，先对 $f(x)$ 进行偶延拓，从而有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx),\qquad (\text{对应于}b_n=0)\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

其中

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi,\qquad \cdots\cdots 1\text{ 分}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2},\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

结合Dirichlet定理可知，余弦级数为：

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2},\quad x\in[0,\pi]\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}.$$

第二步：把$x=0$代入上式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

第三步：利用 Parseval等式可得：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2.\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

从而有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

第四步：在$[0,x]$上积分余弦级数化简可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)^3}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{x^2}{2}\right)=\frac{\pi^2}{8}x-\frac{\pi}{8}x^2.\qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

四、 (12分) 设曲线L是由 $y = x$, $y = 4x$, $xy = 1$, $xy = 4$在第一象限所围成区域D的正向边界，计算

得分	

$$\int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \left(0, \frac{f(xy)}{y}\right),$$

其中函数$f(x)$在$[1,4]$上连续可微且$f(1) = f(4)$.

解. 利用Green公式和$f(1) = f(4)$可得：

$$\int_L \frac{f(xy)}{y} dy = \iint_D f'(xy) dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{\frac{1}{x}}^{4x} f'(xy) dy + \int_1^2 dx \int_x^{\frac{4}{x}} f'(xy) dy = 0.$$

注记：正确使用Green公式得5分，正确计算二重积分得7分。二重积分的计算也可以用换元法，如：$u = xy, v = \frac{y}{x}$等.

五、 (12分) 设Σ是曲面$z = x^2 + y^2$，$0 \le z \le 1$，定向与z轴的夹角为锐角，计算

得分	

$$I = \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \mathbf{F} = (2x + z, 0, 4z).$$

方法一、 直接投影到xoy平面有

$$I = \iint_{x^2+y^2 \le 1} [4(x^2 + y^2) - 2x(2x + x^2 + y^2)]\, dxdy = \pi.$$

方法二、 注意到 Σ 不是闭合曲面，需要补上顶面 Σ_1：$z = 1$下侧使其闭合。

设 $S = \Sigma \cup \Sigma_1$，则 S 是闭合曲面，取内侧。由高斯公式：

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V 6\, dV = -6 \cdot \text{Volume of } V = -3\pi,$$

这是因为：体积 V 是 $z = x^2 + y^2$ 从 $z = 0$ 到 $z = 1$ 之间的部分

$$\text{Volume} = \iint_{x^2+y^2 \le 1} (1 - (x^2 + y^2))\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [(1 - r^2)r]\, drd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

现在计算 $\iint_{\Sigma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$。$\Sigma_1$ 是 $z=1$下侧，法向量为 $(0,0,-1)$，所以：

$$\iint_{\Sigma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{\Sigma_1}4z\,dxdy=-2\iint_{x^2+y^2\le 1}1\,dxdy=-4\pi.$$

因此

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}-\iint_{\Sigma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=-3\pi+4\pi=\pi.$$

注记：(1) 投影正确得6分，答案正确再得6分；(2) 会用Gauss公式得6分，答案正确6分。如果计算过程中差一符号，扣2分。

六、 (12分) 设函数$f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续可微，且$f(0,0)=0$，计算

得分	

$$I=\lim_{x\to 0+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_{\sqrt{t}}^{x}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}.$$

解. 注意到$f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续可微，因此存在常数$M>0$，使得

$$\frac{\left|\displaystyle\int_0^{x^2}(f(t,x)-f(0,x))\mathrm{d}t\right|}{x^3}=\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}|f_1'(\xi,x)|t\,\mathrm{d}t}{x^3}\le\frac{M}{2}x.\qquad\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

用洛必达法则可得:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3e^{-\frac{x^4}{4}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}&&\cdots\cdots 5\text{ 分}\\&=\lim_{x\to 0+}\frac{f(0,x)-f(0,0)}{x}+\lim_{x\to 0+}\frac{\displaystyle\int_0^{x^2}(f(t,x)-f(0,x))\mathrm{d}t}{x^3}\\&=f_y'(0,0).&&\cdots\cdots 4\text{分}\end{aligned}$$

七、 (10分) 设定向光滑曲面Σ的表面积为$\sigma(\Sigma)$，其边界Γ是定向封闭光滑曲线. 试证：

$$\left|\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz\right| \le \sqrt{3}\,\sigma(\Sigma).$$

证明. 设曲面Σ的单位法向量为$\mathbf{n}$，由Stokes公式和Cauchy-Schwarz不等式得：

$$\begin{aligned}\left|\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz\right| &= \left|\iint_\Sigma dydz+dzdx+dxdy\right| && \cdots\cdots 4\text{ 分}\\ &= \left|\iint_\Sigma (1,1,1)\cdot \mathbf{n}dS\right| && \cdots\cdots 3\text{ 分}\\ &\le \left|\iint_\Sigma |(1,1,1)||\mathbf{n}|dS\right| = \sqrt{3}\,\sigma(\Sigma). && \cdots\cdots 3\text{ 分}\end{aligned}$$

八、 (18分) 设函数 $f(x,\alpha)=\dfrac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$，令 $\psi(\alpha)=\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$.

得分	

(1) 试证：对每一个给定的 $\alpha\ge 0$，广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 试证：含参变量广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x$关于$\alpha$在$\alpha\ge 0$上一致收敛；

(3) 计算 $\psi(\alpha)$，其中$\alpha\ge 0$.

证明. (1) 先把积分拆分成两部分：

$$\int_1^{+\infty} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x=\int_1^{2} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

当$\alpha=0$时，$f(x,0)=0$，积分显然收敛. 不妨设$\alpha>0$, 注意到

- 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x,\alpha)\sim\dfrac{\pi}{2\,x^3}$，积分 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ 收敛. ……3分
- 当$x\to 1^+$ 时，$f(x,\alpha)\sim\dfrac{\arctan(\alpha)}{\sqrt{2(x-1)}}$，积分 $\displaystyle\int_1^{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ 是收敛的. ……3 分

从而知广义积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$收敛.

(2) 注意到$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 收敛且

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|=\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}\right|\le\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

由 Weierstrass判别法知，含参变量积分$\int_1^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x$在$\alpha\geq 0$上一致收敛. ……5 分

(3) 利用第(2)问的结果，可以交换积分和导数的顺序

$$\psi'(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}dx. \qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\alpha^2\sec^2\theta}d\theta \qquad \text{令 } x=\sec\theta,\ t=\tan\theta$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2(1+t^2)}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right). \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

结合$\psi(0)=0$有， $\psi(\alpha)=\frac{\pi}{2}\big(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\big)$. ……2 分